SOBRE LA IRRACIONALIDAD DE LOS NÚMEROS: $\left[J \pm J^{-1}\right]/J \in (R/Q)$*:*

Niceto Valcárcel Yeste, licenciado en cc.físicas por la U.N.E.D.

November 24, 2013

1 Introducción.

.

El trabajo que se presenta a continuación es una posible demostración de la irracionalidad de los números:

$$\left[j \pm j^{-1}\right]$$

$j \in \left[(R/Q) - \left\{x \in (R/Q)\, /bx^2 - ax \pm b = 0\right\}\right], (a, b - coprimos) \in Z$

es decir, de los números de la forma $\left[j \pm j^{-1}\right]$ siendo j un número irracional que no cumple ninguna de las dos ecuaciones algebraicas indicadas, siempre que este estudio se confirmara correcto, al no haberse obtenido hasta la fecha demostración confirmada -según la información de la que dispone el autor-, por lo que pide disculpas si no fuera así, y fuese ya propiedad demostrada. *(Agradecería mucho al lector información al respecto, en la dirección de correo que indico al final de este estudio).*

El conjunto de los números racionales Q es un conjunto cerrado con las leyes de composicion suma y producto, pero el conjunto de los números irracionales (R/Q) no es cerrado con estas leyes, y por tanto la suma, diferencia, producto o cociente de dos números irracionales puede ser o no un número irracional. Esto se debe al hecho de que la suma o resta de un racional y un irracional, es irracional; y el producto o cociente entre un racional y un irracional también es irracional, es decir:

Sean $(a_n, b_n - coprimos-) \in Z/$, y $(j_n, k_n) \in (R/Q)$:

1ª) $\frac{a_1}{b_1} \pm \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$

2ª) $\frac{\frac{a_1}{b_1}}{\frac{a_2}{b_2}} = \frac{a_4}{b_4}$

3ª) $\frac{a_1}{b_1}\frac{a_2}{b_2} = \frac{a_5}{b_5}$

4ª) $\frac{a_1}{b_1} \pm j_1 = k_0$

5ª) $\frac{a_1}{b_1} j_1 = k_1$

6ª) $\frac{a_1}{b_1}\frac{1}{j_2} = k_2$

Si bien las propiedades 1ª),2ª) y 3ª) se demuestran muy fácilmente, las restantes se demuestran apoyándose en éstas, aunque son demostraciones conocidísimas y de fácil acceso. Si (k_0, k_1, k_2) de las propiedades 4ª),5ª) y 6ª) , fueran números racionales, no se cumplirían la 1ª),2ª) y 3ª) respectivamente.

De la propiedad 4ª) $\left[\frac{a_1}{b_1} \pm j_0 = k_0\right]$, operando se obtiene, $\left[\frac{a_1}{b_1} = k_0 \mp j_0\right]$, lo cual no debe interpretarse como que la diferncia o suma de dos irracionales cualesquiera es un número racional, ya que j_0 sí es un irracional cualquiera, pero k_0 no lo es, es aquél irracional para el que se cumple la igualdad . En conclusión, la suma o resta de dos irracionales puede ser racional o irracional.

Igual debe deducirse de la propiedad 5ª) $\left[\frac{a_1}{b_1} j_1 = k_1\right]$, operando se obtiene, $\left[\frac{a_1}{b_1} = \frac{k_1}{j_1}\right]$, es decir, no debe interpretarse que el cociente de dos irracionales cualesquiera es un racional, puesto que j_1 sí es un irracional cualquiera, pero k_1 no lo es, $k_1$es el irracional que hace cumplir la igualdad. En conclusión, el cociente entre dos irracionales puede ser racional o irracional.

Igual debe deducirse de la propiedad 6ª), que el producto de dos irracionales puede ser racional o irracional.

En otro orden de cosas, la demostración de si un número es racional o irracional, puede llegar a ser un objetivo muy difícil de conseguir o incluso imposible. Se recuerda vagamente un teorema que demostraba que un problema al que se le buscaba solución, no tenía solución. Otras veces no tiene por qué ser así, la demostración conocidísima que se muestra de la irracionalidad de $\sqrt{2}$, mediante el método de reducción al absurdo, y sabiendo que si un número real no es racional, es irracional , pues $R = Q \cup (R/Q)$, es decir, el conjunto de los números reales es la unión de los racionales y los irracionales, conjuntos cuya intersección es el conjunto vacío.

Si:
$\sqrt{2} \in Q \Longrightarrow \sqrt{2} = \frac{a}{b}$ siendo los números $(a, b)\, coprimos \in Z$
$2b^2 = a^2 \Longrightarrow a = 2c \Longrightarrow b^2 = 2c^2 \Longrightarrow b = 2d$, imposible pues $(a, bcoprimos \in Z)$

Quizás esta demostración es muy sencilla por el hecho de que $\sqrt{2}$ es número algebraico, es decir, un número real o complejo que es raíz o solución de una ecuación algebraica de orden $n \in N$ con coeficientes $a_n \in Z$, de la forma:
$\left[a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0\right]$

Todas las demostraciones que el autor ha tenido la suerte de leer de números trascendentes, aquellos números irracionales que no son algebraicos (*un número irracional es trascendente o algebraico*; *una cosa o la otra*), como los conocidísimos $\pi, e, e^{\pi}, \ln|a|, a \in Q, a \neq 1$, el Teorema de Gelfond-Schneider,..... son a su parecer, muy de agradecer y de admirar a sus autores, por su elevado nivel instructivo, y sobretodo, de ingenio.

2 Proposición.

.

Sea:
$j \in \left[(R/Q) - \left\{x \in (R/Q)\, / bx^2 - ax \pm b = 0\right\}\right], (a, b - coprimos-) \in Z$,

es decir, sea j cualquier irracional que no cumple las ecuaciónes algebraicas indicadas. Entonces:
$\left(j \pm j^{-1}\right) \in (R/Q)$

3 Demostración.

.

Aunque es bien conocido que para todo $j_n \in (R/Q)$, $j_n^{-1} \in (R/Q)$, se demuestra a continuación por el método de reducción al absurdo.
Si $\frac{a_0}{b_0} = j_0^{-1} = \frac{1}{j_0} \Longrightarrow j_0 = \frac{b_0}{a_0}$, lo cual es imposible.
Supóngase que existen j_n para los que:
a) $j_0 \pm j_0^{-1} = \frac{a_0}{b_0}$.
Necesariamente, en tal caso, será:
b) $j_0 \mp j_0^{-1} = j_1$
puesto que de no ser así, y ser $j_1 = j_0 \mp j_0^{-1} = \frac{a_1}{b_1}$, al sumar o restar las ecuaciones de los apartados a),b), resultaría:
$\left(2j_0 = \frac{a_0}{b_0} + j_1 = \frac{a_0}{b_0} + \frac{a_1}{b_1}\right) \in Q; \left(2j_0^{-1} = \frac{a_0}{b_0} - j_1 = \frac{a_0}{b_0} - \frac{a_1}{b_1}\right) \in Q$
Elevando al cuadrado las ecuaciones de los apartados a),b):
$j_0^2 + j_0^{-2} \pm 2 = \left(\frac{a_0}{b_0}\right)^2$
$j_0^2 + j_0^{-2} \mp 2 = j_1^2$
Restando ambas:
$\pm 2^2 = \frac{a_0^2}{b_0^2} - j_1^2$
$\frac{\pm\sqrt{a_0^2 \mp (2b_0)^2}}{b_0} = j_1$
obteniendo:
$2j_0 = \frac{a_0}{b_0} + \frac{\pm\sqrt{a_0^2 \mp (2b_0)^2}}{b_0}$
$j_0 = \frac{a_0 \pm \sqrt{a_0^2 \mp (2b_0)^2}}{2b_0}$
$j_0^{-1} = \frac{a_0 \mp \sqrt{a_0^2 \mp (2b_0)^2}}{2b_0}$.
Siendo t_n un número trascendente cualquiera, $\left(t_0 \pm t_0^{-1}\right)$, son irracionales, pero como se demuestra a continuación, $\left(t_0 \pm t_0^{-1}\right)$ son además, trascendentes.

En primer lugar demostrar que si t_0 es trascendente, t_0^{-1} es trascendente, pues de no ser así se cumpliría:
$\left[a_n t_0^{-n} + \ldots + a_1 t_0^{-1} + a_0 = 0\right]$;
igualdad que multiplicada por t_0^n da como resultado:
$\left[a_n + \ldots + a_1 t_0^{n-1} + a_0 t_0^n = 0\right]$ que no puede ser cierta pues t_0 es trascendente.

Supóngase que siendo a_{g_n} un número algebraico cualquiera, se cumpliera:
c) $t_0 \pm t_0^{-1} = a_{g_0}$
necesariamente sería :
d) $t_0 \mp t_0^{-1} = t_1$
pues de no ser así, sería:
d') $t_0 \mp t_0^{-1} = a_{g_1}$

cumpliéndose, al sumar y restar las ecuaciones de los apartados c),d'):

$\left(2t_0 = a_{g_0} + a_{g_1}; 2t_0^{-1} = a_{g_0} - a_{g_1}\right)$

números algebraicos.

Al igual que anteriromente, elevando al cuadrado las ecuaciones de los apartados c),d) y restando, resulta:

$\pm 2^2 = a_{g_0} - t_1 \Longrightarrow t_1 = a_{g_0} \mp 2^2$

lo cual es imposible por la misma razón de ser el conjunto de los algebraicos un conjunto cerrado con la suma y el producto.

Agradezco al lector el tiempo empleado, así como sus comentarios que podrá enviarme a:

nicetovalcarcel@gmail.com