TÍTULO.

DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL DE LOS NÚMEROS DE LA FORMA (n^2+1)

DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL DE LOS NÚMEROS DE LA FORMA $n^2+(n+1)^2$

DEMOSTRACIÓN DE LA INFINITUD DEL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS PRIMOS DE LA FORMA $(4n-1)$.

DEMOSTRACIÓN DE LA INFINITUD DEL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS PRIMOS DE LA FORMA $(4n+1)$.

AUTOR.

NICETO VALCÁRCEL YESTE.

LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICAS POR LA U.N.E.D.

Funciones generadoras de los números impares no primos.

Un número impar no primo, en adelante, un número compuesto puede expresarse en forma general así $2m+1=(2x+1)(2y+1)$; para todo $x;y \in IN^* = IN - \{0\}$.

La función obtenida de la expresión anterior: $m=2xy+x+y$ es la función que llamo función generadora de los números compuestos, y es al mismo tiempo el subconjunto de los números naturales a partir del cual se obtienen todos los números compuestos sin más que multiplicarlos por dos y sumar uno al resultado. El subconjunto complementario de éste respecto del conjunto $IN^* = IN - \{0\}$ es aquél a partir del cual se obtiene el conjunto de los números primos, IP realizando la misma operación.

Definido el conjunto m por extensión:

$$x=1;\ m_1=3y+1=\{4,7,10,13,16,\ldots\ldots\ldots\infty\} \Rightarrow \quad 2m_1+1=\{9,15,21,27,\ldots\ldots\ldots\ldots\infty\}$$
$$x=2;\ m_2=5y+2=\{7,12,17,22\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\infty\} \Rightarrow \quad 2m_2+1=\{15,25,35.45,\ldots\ldots\ldots\infty\}$$
$$x=3;\ m_3=7y+3=\{10,17,24,31,\ldots\ldots\ldots\ldots\infty\} \Rightarrow \quad 2m_3+1=\{21,35,49,63\ldots\ldots\ldots\ldots\infty\}$$
$$x=4;\ m_4=9y+4=\{13,22,31,40,\ldots\ldots\ldots\ldots\infty\} \Rightarrow \quad 2m_4+1=\{27,45,63,81\ldots\ldots\ldots\ldots\infty\}$$

$$x=k;\ m_k=(2k+1)\ \ y+k \qquad \Rightarrow \qquad 2m_k+1=(2k+1)(2y+1)$$

Si $x=k$ es un valor para el que $(2k+1)\ \notin IP\ \ m_k$ está incluido en todos y cada uno de los subconjuntos correspondientes a los valores m_j a partir de los cuales se obtienen los números primos que forman parte de la descomposición factorial de $(2k+1)=(2m_1+1)^{r_1}(2m_2+1)^{r_2}\ldots\ldots..(2m_j+1)^{r_j}$ de tal forma que m puede redefinirse más adecuadamente, aunque no es obligatorio, de la siguiente manera:

$m=2xy+x+y$ para todo $x;y \in IN^*$. tal que: $(2x+1)\in IP$, siendo $(2x+1)$ uno y cualquiera de los números primos que forman parte de la descomposición factorial de $(2m+1)$

Un número compuesto de la forma $(4m-1)$ puede expresarse de forma general así: $4m-1=(4x-1)(4y+1)$; para todo $x;y \in IN^* = IN - \{0\}$. donde $m=4xy+x-y$ es lo que llamo función generadora de los números compuestos de la forma $(4m-1)$ y es al mismo tiempo el conjunto de los números naturales a partir del cual se obtienen todos los números compuestos de la forma $(4m-1)$.

Definido el conjunto m por extensión:

$$x=1;\ m_1=3y+1=\{4,7,10,13,,\ldots\ldots\ldots\infty\} \Rightarrow \quad 4m_1-1=\{15,27,39\ldots\ldots\ldots\ldots\infty\}$$
$$x=2;\ m_2=7y+2=\{9,16,23,30\ldots\ldots\ldots\infty\} \Rightarrow \quad 4m_2-1=\{35,63,91\ldots\ldots\ldots\ldots\infty\}$$
$$x=3;\ m_3=11y+3=\{14,25,36,47\ldots\ldots\infty\} \Rightarrow \quad 4m_3-1=\{55,99,143,\ldots\ldots\ldots\infty\}$$
$$x=4;\ m_4=15y+4=\{19,34,49,64\ldots\ldots\infty\} \Rightarrow \quad 4m_4-1=\{75,135,195,\ldots\ldots\ldots\infty\}$$

$$x=k;\ m_k=(4k-1)\ \ \ y+k \qquad \Rightarrow \qquad 4m_k-1=(4k-1)(4y+1)$$

Si $x = k$ es un valor para el que $(4k-1) \notin IP$ m_k está incluido en todos y cada uno de los subconjuntos correspondientes a los valores m_j a partir de los cuales se obtienen los números primos de la forma $(4m_j - 1)$ que formen parte de la descomposición factorial de $(4k-1)$. , y como veremos a continuación, siempre existe un número impar de números primos con exponente impar, de esa forma.

Supongamos que no es cierto, es decir, supongamos que existe un $(4m-1)$ para el que se cumple:

$$4m - 1 = \Pi(4m_j + 1)^{r_j} \qquad \Pi(4m_i - 1)^{2r_i} \quad \Pi(4m_k - 1)^{1+2r_k}$$

$(4m_j + 1) \in IP$ para todo j; $(4m_i - 1) \in IP$ para todo i; $(4m_k - 1) \in IP$ para todo k;

Resulta que:

$\Pi(4m_j + 1)^{r_j} = 4M_1 + 1$; $M_1 \in IN$ para todo r_j
$\Pi(4m_j + 1)^{2r_i} = 4M_2 + 1$; $M_2 \in IN$ para todo r_i
$\Pi(4m_j + 1)^{1+2r_k} = 4M_3 + (-1)^k$; $M_3 \in IN$ para todo r_k

De forma que:

$$4m - 1 = \left(4M_1 + 1\right)\left(4M_2 + 1\right)\left(4M_3 + (-1)^k\right) = \left(4M_{12} + 1\right)\left(4M_3 + (-1)^k\right) =$$

Si k es par, $4m - 1 = \left(4M_{12} + 1\right)\left(4M_3 + 1\right) = 4M + 1$

Tal igualdad no es posible pues no existen dos números naturales m, M para los que se cumpla $4m - 1 = 4M + 1 \Rightarrow 2m - 1 = 2M$

Si k es impar, $4m - 1 = \left(4M_{12} + 1\right)\left(4M_3 - 1\right) = 4M - 1$ que es posible.

Así pues m puede redefinirse más adecuadamente, aunque no es obligatorio, de la siguiente manera:

$m = 4xy + x - y$ para todo $x;y \in IN^*$. tal que: $(4x-1) \in IP$, siendo $(4x-1)$ uno y cualquiera de los números primos de la forma $(4x-1)$ que formen parte de la descomposición factorial de $(4m-1)$.

Un número compuesto de la forma $(4m+1)$ puede expresarse en forma general de una de las dos formas siguientes:

$4m_1 + 1 = (4x-1)(4y-1)$; para todo $x;y \in IN^* = IN - \{0\}$. donde $m_1 = 4xy - x - y$
$4m_2 + 1 = (4x+1)(4y+1)$; para todo $x;y \in IN^* = IN - \{0\}$. donde $m_2 = 4xy + x + y$

Ambas funciones m_1 y m_2 son lo que llamo par de funciones generadoras de los números compuestos de la forma $(4m+1)$ y son al mismo tiempo los subconjuntos de números naturales a partir de cuya unión se obtienen todos los números compuestos de la forma $(4m+1)$.

Definido el conjunto m_1 por extensión:

$$
\begin{array}{lll}
x=1;\ m_{11}=3y-1=\{2,5,8,11,,\ldots\ldots\ldots\infty\} & \Rightarrow & 4m_{11}+1=\{9,21,33,45\ldots\ldots\ldots\ldots\infty\}\\
x=2;\ m_{12}=7y-2=\{5,12,19,,\ldots\ldots\ldots\infty\} & \Rightarrow & 4m_{12}+1=\{21,49.77\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\infty\}\\
x=3;\ m_{13}=11y-3=\{8,19,30\ldots\ldots\ldots,.\infty\} & \Rightarrow & 4m_{13}+1=\{33,77,121,\ldots\ldots\ldots\ldots\infty\}\\
x=4;\ m_{14}=15y-4=\{11,26,41,\ldots\ldots\ldots\infty\} & \Rightarrow & 4m_{14}+1=\{45,105,165\ldots\ldots\infty\}
\end{array}
$$

$$x=k;\ m_{1k}=(4k-1)\quad y-k \qquad \Rightarrow \qquad 4m_{1k}+1=(4k-1)(4y-1)$$

Si $x=k$ es un valor para el que $(4k-1)\notin IP$ m_k está incluido en todos y cada uno de los subconjuntos correspondientes a los valores m_j a partir de los cuales se obtienen los números primos de la forma $(4m_j-1)$ que formen parte de la descomposición factorial de $(4k-1)$. , y como vimos anteriormente, siempre existe un número impar de primos de esa forma elevado a exponente impar.

Definido el conjunto m_2 por extensión:

$$
\begin{array}{lll}
x=1;\ m_{21}=5y+1=\{6,11,16,21\ldots\ldots\ldots\infty\} & \Rightarrow & 4m_{21}+1=\{25,45,65,\ldots\ldots\ldots\ldots\infty\}\\
x=2;\ m_{22}=9y+2=\{11,20,29,38\ldots\ldots\infty\} & \Rightarrow & 4m_{22}+1=\{45,81,117\ldots\ldots\ldots\ldots\infty\}\\
x=3;\ m_{23}=13y+3=\{16,29,42,55\ldots,.\infty\} & \Rightarrow & 4m_{23}+1=\{65,117,169\ldots\ldots\ldots\infty\}\\
x=4;\ m_{24}=17y+4=\{21,38,55,72\ldots\ldots\infty\} & \Rightarrow & 4m_{24}+1=\{65,153,221\ldots\ldots\ldots\infty\}
\end{array}
$$

$$x=k;\ m_{2k}=(4k+1)\quad y+k \qquad \Rightarrow \qquad 4m_{2k}+1=(4k+1)(4y+1)$$

Si $x=k$ es un valor para el que $(4k+1)\ \notin IP$ m_k está incluido en todos y cada uno de los subconjuntos correspondientes a los valores m_j a partir de los cuales se obtienen los números primos de la forma $(4m_j-1)$ y/ó $(4m_j+1)$ que formen parte de la descomposición factorial de $(4k+1)$.

Proposición:

$$n^2+1=\left(2^{\frac{1-(-1)^n}{2}}\right)\Pi(4x_j+1)^{r_j}\ ;\ (4x_j+1)\in IP;\ \text{para todo } n\in IN$$

Es decir, todos los números primos que forman parte de la descomposición factorial de n^2+1 son de la forma $(4x+1)$ si n es par, e igualmente (multiplicado por 2) si n es impar.

Demostración:

A) Supongamos primero n par. $n=2n_o$

$$(2n_o)^2+1=2(2n_o^2)+1$$

$$2n_o^2=2xy+x+y \text{ tal que } (2x+1)\in IP$$

Necesariamente $x + y = 2z$

$2n_o^2 = 2x(2z - x) + 2z$
$n_o^2 = x(2z - x) + z = 2xz + z - x^2 = 2xz + z - x^2 - z^2 + z^2 = z^2 + z - (x - z)^2$

Haciendo $(x - z) = w \Rightarrow x = w + z$

$n_o^2 = z^2 + z - w^2 = (z + 1)z - w^2$

$\mathbf{w}$ y $\mathbf{n}_o$ son de la misma paridad. Si ambos son pares:

$n_o = 2n_1$; $w = 2w_1$

$(2n_1)^2 = z(z + 1) - (2w_1)^2$

Necesariamente ha de ser bien: $z = 4z_1$ ó $z + 1 = 4z_1$

Si es $z + 1 = 4z_1$, sustituyendo:

$(n_1)^2 = z_1(4z - 1) - (w_1)^2 \Rightarrow (n_1)^2 + (w_1)^2 = z_1(4z_1 - 1)$

Pero la suma de dos cuadrados no puede tener factores primos con potencia impar, y como sabemos $(4z_1 - 1)$ los tiene y z_1 no puede tener los mismos factores primos que $(4z_1 - 1)$, de forma que no puede ser: $z + 1 = 4z_1$

$\mathbf{z}, \mathbf{w}, \mathbf{n}_o$ son de la misma paridad y $x = w + z = 2w_1 + 4z_1 = 2(w_1 + 2z_1) = 2x_1$ debe ser par. Por tanto todos y cada uno de los factores primos de $(2n)^2 + 1$ son en este caso de la forma $(2x + 1) = (4x_1 + 1) \in IP$

$\mathbf{w}$ y $\mathbf{n}_o$ son de la misma paridad. Si ambos son impares:

$n_o = 1 + 2n_1$; $w = 1 + 2w_1$ $(1 + 2n_1)^2 = z(z + 1) - (1 + 2w_1)^2$

Necesariamente ha de ser bien: $z = 2z_1$ ó $z + 1 = 2z_1$

Si es $z = 2z_1$, sustituyendo:

$(2n_1^2 + 2n_1 + 2w_1^2 + 2w_1) + 1 = z_1(2z_1 + 1)$

Necesariamente ha de ser: $z_1 = 1 + 2z_2$ resultando:

$(2n_1^2 + 2n_1 + 2w_1^2 + 2w_1) + 1 = (1 + 2z_2)(4z_2 + 3)$

y por tanto:

$$2[(2n_1^2 + 2n_1 + 2w_1^2 + 2w_1) + 1] = 2(2(z_2 + 1) - 1)(4(z_2 + 1) - 1) =$$
$$= 2(2z_3 - 1)(4z_3 - 1) = (1 + 2n_1)^2 + (1 + 2w_1)^2$$

Pero la suma de dos cuadrados no puede tener números primos de la forma $(4m-1)$ con exponente impar en su descomposición factorial.

Dado que $(2z_3-1)$ y $(4z_3-1)$ no tienen factores en común, la igualdad anterior no puede cumplirse, y debe ser siempre $z+1=2z_1$

$\mathbf{z,w,n}_o$ son de la misma paridad y $x=w+z=1+2w_1+2z_1-1= \quad =2(w_1+z_1)=2x_1=x$ debe ser par. Por tanto todos y cada uno de los factores primos de $(2n)^2+1$ son en este caso de la forma:

$(2x+1)=(4x_1+1)\in IP$

Queda demostrado que la proposición es cierta cuando n es par.

B) Supongamos n impar. $n=1+2n_o$

$(1+2n_o)^2+1=2[2(n_0^2+n_o)+1]$

$n_0^2+n_o=2xy+x+y$ tal que $(2x+1)\in IP$

Necesariamente $x+y=2z$

$n_0^2+n_o=2x(2z-x)+2z=2(2xz-x^2+z+z^2-z^2)=\ 2\left(z^2+z-(x-z)^2\right)$

Haciendo $(x-z)=w\Rightarrow x=w+z$

$n_o^2+n_o=2(z^2+z-w^2)$

B1) Supongamos $n_o=2n_1$

$2n_1^2+n_1=z^2+z-w^2\Rightarrow n_1^2+n_1(n_1+1)=z(z+1)-w^2$

por lo que $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{w}$ son de la misma paridad.

$2n_1^2+n_1=z^2+z-w^2;\Rightarrow n_1^2+w^2=z^2-n_1^2+z-n_1$

$n_1^2+w^2=(z-n_1)(z+n_1+1)$

Supongamos $z-n_1=2z_1+1$

$n_1^2+w^2=(2z_1+1)(2n_1+2z_1+2)=2(2z_1+1)(n_1+z_1+1)$

1^o) Supongamos $n_1=2n_2\Rightarrow w_1=2w_2\Rightarrow n_1+z_1+1=2z_2$

$z_1=2(z_2-n_2)-1$

Sustituyendo:

$$4n_2^2 + 4w_1^2 = 4z_2(4z_2 - 4n_2 - 1) \Rightarrow n_2^2 + w_1^2 = z_2(4(z_2 - n_2) - 1) = 4z_2^2 - 4z_2 n_2 - z_2$$

$$n_2^2 + 4z_2 n_2 + w_1^2 + 4z_2^2 = 8z_2^2 - z_2 = z_2(8z_2 - 1) = z_2(4(2z_2) - 1)$$

$$(n_2 + 2z_2)^2 + w_1^2 = z_2(4(2z_2) - 1)$$

Pero la suma de dos cuadrados no puede tener en su descomposición factorial números primos de la forma $4m-1$ elevados a exponente impar y z_2 no tiene factores comunes con $(8z_2 - 1)$ por lo que $z - n_1 \neq 2z_1 + 1$

$\mathbf{z, w, n}_1$, son de la misma paridad y $x = w + z = 2x_1$ debe ser par.

Por tanto todos y cada uno de los factores primos de $(2n+1)^2 + 1$ son, en este caso, de la forma: $(2x+1) = (4x_1 + 1) \in IP$

2^o) Supongamos $n_1 = 1 + 2n_2 \Rightarrow w_1 = 1 + 2w_2$

Sustituyendo:

$$4n_2^2 + 4n_2 + 4w_2^2 + 4w_2 + 2 = 2(2z_1 + 1)(2n_2 + z_1 + 2)$$

$$2n_2^2 + 2n_2 + 2w_2^2 + 2w_2 + 1 = (2z_1 + 1)(2n_2 + z_1 + 2) = 2(n_2^2 + n_2 + w_1^2 + w_1) + 1$$

Necesariamente es $z_1 = 2z_2 + 1$

$$2(n_2^2 + n_2 + w_1^2 + w_1) + 1 = (4z_2 + 3)(2n_2 + 2z_2 + 3)$$

$$4(n_2^2 + n_2 + w_1^2 + w_1) + 2 = 2(4z_2 + 3)(2n_2 + 2z_2 + 3) = 4n_2(4z_2 + 3) + (4z_2 + 3)(2z_2 + 3)$$

$$4n_2^2 + 4n_2 + 1 + (1 + 2w_1)^2 - 16z_2 n_2 - 12n_2 + (4z_2)^2 + 3 = (4z_2 + 3)(2z_2 + 3) + (4z_2)^2 + 3$$

$$2(n_2 - 1 - 2z_2)^2 + (1 + 2w_1)^2 = (4z_2 + 3)(2z_2 + 3) + (4z_2)^2 + 3 = 32(z_2)^2 + 52z_2 + 21$$

$$(2(n_2 - 1 - 2z_2))^2 + (1 + 2w_1)^2 = (8z_2 + 7)(4z_2 + 3) = [4(2(z_2 + 1)) - 1][4(z_2 + 1) - 1]$$

Pero la suma de dos cuadrados no puede tener en su descomposición factorial números primos de la forma $(4m-1)$ elevados a exponente impar y $[4(2(z_2+1)) - 1]$; $[4(z_2+1) - 1]$ no tienen factores comunes y sí tienen ambos un número impar de números primos de la forma $(4m-1)$ con exponente impar.

Por tanto: $z_1 \neq 2z_2 + 1$

$\mathbf{z, w, n_1}$, son de la misma paridad y $x = w + z = 1 + 2w_1 + 1 + 2n_1 + 2z_2 = 2x_1$ debe ser par.

Todos y cada uno de los factores primos de $(2n+1)^2 + 1$ son, en este otro caso, de la forma: $(2x+1) = (4x_1 + 1) \in IP$

B2) Supongamos $n_o = 2n_1 - 1$

$$n_o^2 + n_o = 2(z^2 + z - w^2) = (2n_1 - 1)^2 + 2n_1 - 1 = 4n_1^2 - 2n_1 = 2(n_1^2 + n_1(n_1 - 1))$$

$$n_1^2 + n_1(n_1 - 1) = z^2 + z - w^2 = z(z+1) - w^2$$

Por tanto, $\mathbf{n_1}$ y $\mathbf{w}$ son de la misma paridad.

$$n_1^2 + w^2 = z^2 - n_1^2 + n_1 + z = (z + n_1)(z - n_1 + 1)$$

Supongamos $z - n_1 + 1 = 2z_1$

$$n_1^2 + w^2 = 2z_1(2z_1 + 2n_1 - 1)$$

1^o) Sea $n_1 = 2n_2 \Rightarrow \quad w = 2w_1 \Rightarrow \quad z_1 = 2z_2$

Sustituyendo:

$$n_2^2 + w_1^2 = z_2(4z_2 + 4n_2 - 1)$$

$$n_2^2 - 4z_2n_2 + 4z_2^2 + w_1^2 = z_2(4z_2 - 1) + 4z_2^2 = z_2(4(2z_2) - 1) = (n_2 - 2z_2)^2 + w_1^2$$

Pero la suma de dos cuadrados no puede tener en su descomposición factorial números primos de la forma $(4m-1)$ elevados a exponente impar y z_2 no tiene factores comunes con $(8z_2 - 1)$ por lo que $z - n_1 + 1 \neq 2z_1$ en este caso.

$\mathbf{z, w, n_1}$, son de la misma paridad y $x = w + z = 2x_1$ debe ser par.

Todos y cada uno de los factores primos de $(2n+1)^2 + 1$ son en este caso de la forma: $(2x+1) = (4x_1 + 1) \in IP$

2^o) Sea $n_1 = 1 + 2n_2 \Rightarrow \; w = 1 + 2w_1$

Sustituyendo

$$2(2(n_2^2 + n_2 + w_1 + w_1^2) + 1) = 2z_1(2z_1 + 4n_2 + 1)$$

$(2n_2^2 + 2n_2 + 2w_1 + 2w_1^2) + 1 = z_1(2z_1 + 4n_2 + 1)$ necesariamente es : $z_1 = 2z_2 + 1$

$$(2n_2^2 + 2n_2 + 2w_1 + 2w_1^2) + 1 = (2z_2 + 1)(4z_2 + 4n_2 + 3)$$

$$(2n_2^2 + 2n_2 + 2w_1 + 2w_1^2) + 1 - 4n_2(2z_2 + 1) = (2z_2 + 1)(4z_2 + 3)$$

$$2(2n_2^2 + 2n_2 + 2w_1 + 2w_1^2) + 2 - 8n_2(2z_2 + 1) = 2(2z_2 + 1)(4z_2 + 3)$$

$$4n_2^2 - 4n_2 + (2w_1 + 1)^2 + 1 - 16n_2 z_2 + 16z_2^2 + 8z_2 = 2(2z_2 + 1)(4z_2 + 3) + 16z_2^2 + 8z_2$$

$$(2n_2 - 1 - 4z_2)^2 + (2w_1 + 1)^2 = 2(16z_2^2 + 14z_2 + 3) = 2(2z_2 + 1)(8z_2 + 3)$$

$$(2n_2 - 1 - 4z_2)^2 + (2w_1 + 1)^2 = 2(2z_2 + 1)(4(2z_2 + 1) - 1)$$

Pero la suma de dos cuadrados no puede tener en su descomposición factorial números primos de la forma $(4m - 1)$ elevados a exponente impar y $(2z_2 + 1)$; $(4(2z_2 + 1) - 1)$ no tienen factores comunes y sí tienen ambos un número impar de factores primos con exponente impar, por lo que $z - n_1 + 1 \neq 2z_1$.

$\mathbf{z}, \mathbf{w}, \mathbf{n}_1$, son de la misma paridad y $x = w + z = 2x_1$ debe ser par.

Todos y cada uno de los factores primos de $(2n + 1)^2 + 1$ son, en este otro caso, de la forma: $2x + 1 = 4x_1 + 1 \qquad ;\in IP$

Queda pues demostrado que la proposición también es cierta cuando n es impar.

Consecuencia directa de la veracidad de la proposición anterior es la proposición siguiente.

Proposición: $n^2 + (n + 1)^2 = \Pi(4x_j + 1)^{r_j}$; $(4x_j + 1) \in IP;$ para todo $n \in IN$

Sin más, $(2n + 1)^2 + 1 = 4n^2 + 4n + 2 = 2(2n^2 + 2n + 1) = 2\left(n^2 + (n + 1)^2\right) = 2\Pi(4x_j + 1)^{r_j}$

$$n^2 + (n + 1)^2 = \Pi(4x_j + 1)^{r_j}$$

INFINITUD DEL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS PRIMOS DE LA FORMA $(4n+1)$

Supongamos que este conjunto fuera finito.

Sea $\Pi_0(4x_j+1)$ el productorio de todos los primos de esa forma.

$(\Pi_0(4x_j+1))^2 + (\Pi_0(4x_j+1)+1)^2$ debe contener sólo números primos de la forma $(4x+1)$ en su descomposición factorial y no es posible.

$$(\Pi_0(4x_j+1))^2 + (\Pi_0(4x_j+1)+1)^2 = 2(\Pi_0(4x_j+1))^2 + 2\Pi_0(4x_j+1)+1 == (4M+1)(4x+1)$$

$4M+1 = \frac{2\left(\Pi_0(4x_j+1)\right)^2}{4x+1} + \frac{2\Pi_0(4x_j+1)}{4x+1} + \frac{1}{4x+1}$ debe ser un número entero y no lo es porque sí son enteros los primeros dos sumandos, pero no lo es $\frac{1}{4x+1}$. El conjunto no puede ser finito.

INFINITUD DEL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS PRIMOS DE LA FORMA $(4n-1)$

Supongamos que el conjunto es finito y que hay por tanto un último primo de la forma $(4n_0-1)$ de tal manera que:

Para todo $k > 0 \Rightarrow (4(n_0+k)-1) \notin IP$

Si es $k = \Pi_0(4x_j-1)$ el productorio de todos los primos de esa forma excepto el último $(4n_0-1)$

$$(4(n_0+k)-1) = (4(n_0+\Pi_0(4x_j-1))-1) = (4n_0-1)+4\Pi_0(4x_j-1)$$

Pero en la descomposición factorial de cualquier número compuesto de la forma $(4m-1)$ hay siempre un número impar de factores primos de la forma $(4x-1)$ con exponente impar.

$$(4n_0-1)+4\Pi_0(4x_j-1) = (4x-1)(4M\pm 1)$$

$$(4M\pm 1) = \frac{4n_0-1}{4x-1} + \frac{4\Pi_0(4x_j-1)}{4x-1}$$

Siempre uno sólo de esos dos sumandos es un número entero y por tanto lo supuesto no es cierto. El conjunto no es finito, tiene infinitos términos.

Ha realizado este trabajo, Niceto Valcárcel Yeste, licenciado en CC.FISICAS por la U.N.E.D.

Agradezco al lector el tiempo empleado y sus comentarios, que podrá enviarme a la dirección de correo:

e-mail: mamadoro@telefonica.net