TITULO

METODO PARA LA RESOLUCION DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES.
METODO PARA LA RESOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES.

AUTOR

NICETO VALCARCEL YESTE.

LICENCIADO EN CC.FISICAS.

Sea la función W = R e^{ig} (P + i Q) .

Las funciones g , R , P , Q , son de la forma general : A = A_0 + i A_1 donde A_0 y A_1 son funciones reales de variable real e i = $\sqrt{-1}$.

Para la demostración a continuación haré : A_1 = 0 y eliminando los subíndices, innecesarios, escribo:

W = R_0 e^{ig_0} (P_0 + i Q_0) = R e^{ig} (P + i Q) .... ecuación 1.......

Derivo esa función W e igualo esa derivada a la función : e^{ig} (f + i Φ) donde f y Φ son de la forma general : A = A_0 + i A_1 y , al igual que anteriormente, A_1 = 0 y eliminando subíndices innecesarios obtengo:

$$W' = e^{ig}\left[ig'(RP + i\,RQ) + (RP)' + i\,(RQ)'\right] = e^{ig}(f + i\,\Phi\,) =$$

$$= f\cos g - \Phi\,\sin g + i(f\sin g + \Phi\,\cos g).$$

Obtengo dos igualdades identificando partes reales e imaginarias de la ecuación anterior:

$(RP)' - g'RQ = f$...........ecuación 2 ....

$(RQ)' + g'RP = \Phi$ ....ecuación 3 ....

Despejo P en (3) para trasladar a (2):

$$P = \frac{\Phi-(RQ)'}{Rg'}$$

$$f = \left(\frac{\Phi-(RQ)'}{g'}\right)' - g'RQ = \frac{\Phi'}{g'} - \frac{g''}{(g')^2}\Phi + \frac{g''}{(g')^2}(RQ)' - \frac{1}{g'}(RQ)'' - g'RQ$$

Multiplicando ambos miembros por $(\frac{-g'}{R})$ y reagrupando términos obtengo:

$$Q'' + \left[\frac{2R'}{R} - \frac{g''}{g'}\right]Q' + \left[\frac{R''}{R} - \frac{g''}{g'}\frac{R'}{R} + (g')^2\right]Q = \frac{1}{R}\left[\Phi' - \frac{g''}{g'}\Phi - g'f\right]...(4)....$$

Esta ecuación (4) parece una ecuación diferencial de segundo orden en Q con coeficientes variables, y efectivamente lo es; pero es más que eso, ya que las cinco funciones que aparecen en ella son funciones cualesquiera y por tanto podrían ser también combinaciones de entre ellas mismas y/o de entre ellas y sus derivadas primeras, segundas.....
Busco la solución a la ecuación (4) para Q en la forma Q = Q (g , R , Φ , f).
Necesariamente la solución es una combinación, en principio desconocida, de las funciones primitivas:

$I_1 = \int(f\cos g - \Phi \sin g)$ $\qquad$ $I_2 = \int(\Phi \cos g + f\sin g)$

DEMOSTRACION:

$Q = A\, I_1 + B\, I_2 = A\int(f\cos g - \Phi \sin g) + B\int(\Phi \cos g + f\sin g)$

Las funciones A y B son funciones a determinar.

$Q' = A_1' I_1 + A(f\cos g - \Phi \sin g) + B' I_2 + B\ \Phi \cos g + f \sin g$

$Q'' = A_1'' I_1 + 2\, A'(f\cos g - \Phi \sin g) + A\ \left(f' \cos g - g' f\sin g - \Phi' \sin g - g'\Phi \cos g\right) + B'' I_2 +$

$+ 2B'(f\sin g + \Phi \cos g) + B\left(g' f\cos g + f' \sin g - g'\Phi \sin g + \Phi' \cos g\right)$

Traslado a (4):

$\frac{1}{R}\left(\Phi' - \frac{g''}{g'}\Phi - g' f\right) = \Phi'(-A\sin g + B\cos g) +$

$+ \Phi(-2A' \sin g + 2B' \cos g - Ag' \cos g - Bg' \sin g +$

$+(\frac{2R'}{R} - \frac{g''}{g'})(B\cos g - A\sin g))\ + f'(A\cos g + B\sin g) +$

$+f\ \left[\ 2A' \cos g + 2B' \sin g - Ag' \sin g + Bg' \cos g + (\frac{2R'}{R} - \frac{g''}{g'})(A\cos g + B\sin g)\right] +$

$+I_1\left[A'' + \left(\frac{2R'}{R} - \frac{g''}{g'}\right)A' + A\left(\frac{R''}{R} - \frac{g''}{g'}\frac{R'}{R} + (g')^2\right)\right] +$

$+I_2\left[B'' + \left(\frac{2R'}{R} - \frac{g''}{g'}\right)B' + B\left(\frac{R''}{R} - \frac{g''}{g'}\frac{R'}{R} + (g')^2\right)\right]$........ecuación (5).........

De la igualdad anterior obtengo:

$$0 = f'(A\cos g + B\sin g)$$

$$\frac{1}{R} = -A\sin g + B\cos g$$

Puesto que f es una función cualquiera que no tiene por qué ser una función constante:

$$0 = A\cos g + B\sin g$$

$$\frac{1}{R} = -A\sin g + B\cos g$$

con solución:

$$A = \frac{-\sin g}{R} \quad ; \quad B = \frac{\cos g}{R}$$

Contunúo haciendo:

$$A' = -\frac{g'}{R}\cos g + \frac{R'}{R^2}\sin g$$

$$A'' = -\frac{g''}{R}\cos g + \frac{(g')^2}{R}\sin g + \frac{R'}{R^2}\cos g - 2\frac{(R')^2}{R^3}\sin g + g'\frac{R'}{R^2}\cos g + \frac{(R)''}{R^2}\sin g$$

$$B' = -\frac{g'}{R}\sin g - \frac{R'}{R^2}\cos g$$

$$B'' = -\frac{g''}{R}\sin g - \frac{(g')^2}{R}\cos g + \frac{R'}{R^2}g'\sin g + 2\frac{(R')^2}{R^3}\cos g + g'\frac{(R)'}{R^2}\sin g - \frac{(R)''}{R^2}$$

Son aconsejables las igualdades:

$$\frac{-R'}{R^2} = B'\cos g - A'\sin g\,; \quad \frac{1}{R} = B\cos g - A\sin \quad ; \quad \frac{-g'}{R} = B'\sin g + A'\cos g$$

Traslado los resultados a la ecuación (5):

$$\frac{1}{R}\left(\Phi' - \frac{g''}{g'}\Phi - g'f\right) = \frac{\Phi'}{R} +$$

$$+\Phi\left[2(B'\cos g - A'\sin g) - g'(B\sin g + A\cos g) + (\frac{2R'}{R} - \frac{g''}{g'})(B\cos g - A\sin g)\right] +$$

$$+f\,[2(B'\sin g + A'\cos g) + g'(B\cos g - A\sin)] +$$

$$+I_1\left[\begin{array}{c} -\frac{g''}{R}\cos g + \frac{(g')^2}{R}\sin g + 2\frac{R'}{R^2}\sin\; - 2\frac{(R)'}{R^3}\sin g + \\ +\frac{(R)''}{R^2}\sin g + (\frac{2R'}{R} - \frac{g''}{g'})(-\frac{g'}{R}\cos g + \frac{R'}{R^2}\sin g) - \frac{\sin g}{R}\left[\frac{R''}{R} - \frac{g''}{g'}\frac{R'}{R} + (g')^2\right] \end{array}\right]$$

$$+I_2\left[\begin{array}{c} -\frac{g''}{R}\sin g - \frac{(g')^2}{R}\cos g + 2\frac{R'}{R^2}g'\sin g + 2\frac{(R')^2}{R^3}\cos g - \\ -\frac{(R)''}{R^2}\sin g + (\frac{2R'}{R} - \frac{g''}{g'})(-\frac{g'}{R}\sin g - \frac{R'}{R^2}\cos g) + \frac{\cos g}{R}\left[\frac{R''}{R} - \frac{g''}{g'}\frac{R'}{R} + (g')^2\right] \end{array}\right]$$

$$= \frac{\Phi'}{R} + \Phi\left[\frac{-2(R)'}{R^2} + \frac{1}{R}(\frac{2R'}{R} - \frac{g''}{g'})\right] + f\left(\frac{-2g'}{R} + \frac{g'}{R}\right) + 0\,I_1 + 0\,I_2 =$$

$= \frac{1}{R}\left[\Phi' - \frac{g''}{g'}\Phi - g'f\right]$,como quería demostrar.

QUEDA DEMOSTRADO QUE LA FUNCION:

$Q = \frac{1}{R}\left[\cos g\int(\Phi\cos g + f\sin g) + \sin g\int(\Phi\cos g + f\sin g)\right]$...ecuación (6)....

ES SOLUCION PARA LA ECUACION (4).

La siguiente elección de las funciones g y f permite realizar la demostración anterior mucho más adecuadamente, pues se trabaja con la función exponencial en lugar de las funciones trigonométricas. $g = ig_0$ $f = if_0$ y las ecuaciones (4) y (6) resultan así:

$$Q'' + \left[\frac{2R'}{R} - \frac{g_0''}{g_0'}\right]Q' + \left[\frac{R''}{R} - \frac{g_0''}{g_0'}\frac{R'}{R} - (g_0')^2\right]Q = \frac{1}{R}\left[\Phi' - \frac{g_0''}{g_0'}\Phi + g_0'f\right]\text{...ec.}(4.0)..$$

Con solución:

$$Q = \frac{1}{2R}\left[e^{g_0}\int((\Phi + f)e^{-g_0}) + e^{-g_0}\int((\Phi - f)e^{g_0})\right]...(6.0)$$

También es conveniente para demostraciones posteriores hacer:

$$H = \frac{1}{R}\left[\Phi' - \frac{g_0''}{g_0'}\Phi + g_0'f\right]$$

para expresar las ecuaciones (4.0) y (6.0) anteriores así:

$$Q'' + \left[\frac{2R'}{R} - \frac{g_0''}{g_0'}\right]Q' + \left[\frac{R''}{R} - \frac{g_0''}{g_0'}\frac{R'}{R} - (g_0')^2\right]Q = H...(4.1)$$

Con solución:

$$Q = \frac{1}{2R}\left[e^{g_0}\int(\frac{HR}{g'}e^{-g_0}) - e^{-g_0}\int(\frac{HR}{g'}e^{g_0})\right]...(6.1)$$

APLICACIONES

SOLUCION A LA ECUACION DIFERENCIAL LINEAL DE PRIMER ORDEN

$$\frac{dY}{dx} + p(x)y = T(x)$$

Hago, en (4.0) y (6.0):

Q = constante = 1 (por comodidad)
f = Φ

$$\Phi' + \Phi\left(g_0' - \frac{g_0''}{g_0'}\right) = R'' - \frac{g_0''}{g_0'}R' - (g_0')^2R$$

Con solución:

$$R = e^{g_0}\int(\Phi e^{-g_0})$$

Derivando en esa igualdad:

$$R' - g_0' R = \Phi$$

En relación a la ecuación del encabezamiento:

$$p(x) = g_0' - \frac{g_0''}{g_0'}\ ; \qquad e^{\int p(x)} = \frac{e^{g_0}}{g'}$$

$$T(x) = R'' - \frac{g_0''}{g_0'}R' - R(g_0')^2; \int (T(x) e^{\int p(x)}) = \int \Big[(R'' - \frac{g_0''}{g_0'}R' - R(g_0')^2)\frac{e^{g_0}}{g_0'} \Big] =$$

$$= \int (e^{g_0}(\frac{R'}{g_0'})') - \int (Re^{g_0}g_0') = e^{g_0}(\frac{R'}{g_0'}) - \int (e^{g_0}R') - e^{g_0}R + \int (e^{g_0}R') = \Phi e^{\int p(x)}.$$

$$\Phi = e^{-\int p(x)} . \Big[\int (T(x) e^{\int p(x)} + C_0 \Big]$$,como quería demostrar .(C_0 cte de integración).

Existen más formas de llegar al mismo resultado anterior y los que resolveré posteriormente.
Por ejemplo, en este caso de la ecuación diferencial lineal de primer orden, haciendo: $Q = constante;\ 0 = \Phi \sin g - f \cos g$; y trasladando a (4) y (6). También haciendo $R = e^{g_0};\ f = \Phi$ y trasladando a (4.0) y (6.0) y resolviendo para Q'.

SOLUCION A LA ECUACION DIFERENCIAL DE BERNOUILLI:

$$\frac{dY}{dx} + p(x)y = T(x)y^n$$

De la demostración inmediatamente anterior hago:$T(x) = S(x)\Phi^n$ y multiplicando ambos miembros por $(1-n)e^M$, siendo $M' = (1-n)(g_0' - \frac{g_0''}{g_0'})$, resulta:

$$\Big[\Phi' - \frac{g_0''}{g_0'}\Phi + g_0' f\Big](1-n)e^M = (1-n)e^M S(x)\Phi^n =$$

$$e^M \Big[(1-n)\Phi^{-n}\Phi' + \Phi^{-n+1}(1-n)(g_0' - \frac{g_0''}{g_0'} \Big] = (e^M \Phi^{-n+1})'.$$

$$(1-N)(\frac{e^{g_0}}{g_0'})^{(1-n)}S(x) = (\frac{e^{g_0}}{g_0'}\Phi^{-n+1})';\ \ \Phi = g' e^{-g_0}\Big[\int (1-n)(\frac{e^{g_0}}{g_0'})^{(1-n)}S(x) \Big]^{\frac{1}{1-n}} =$$

$$= e^{-\int p(x)} \Big[\int (1-n)(\frac{e^{g_0}}{g_0'})^{(1-n)}S(x) \Big]^{\frac{1}{1-n}}$$; como quería demostrar.

SOLUCION A LA ECUACION DIFERENCIAL DE SEGUNDO ORDEN, HOMOGENEA, CON COEFICIENTES CONSTANTES.

a) El caso de dos raíces reales iguales del polinomio característico.

Hago, en (4) y (6) : $R = ce^{bx}; f = 0;\ \ \Phi = d;\ \ g = cte.$ c,b,d $\in$ IR

$Q'' + 2bQ' + b^2Q = 0$;   con solución:

$Q = \frac{1}{c}e^{-bx}(\cos^2 g + \sin^2 g)\int(d\,dx) = e^{-bx}(C_1 + C_2x).$

b) El caso de dos raíces reales diferentes del polinomio característico.

Hago, en (4) y (6) : $R = ce^{bx}; f = 0;\ \ \Phi = d;\ \ g = iax.$ a,b,c,d ∈ IR

$Q'' + 2bQ' + (b^2 - a^2)Q = 0$;   con solución:

$Q = \frac{1}{c}e^{-bx}\left[\cosh ax\int(d\cosh ax) + \sinh ax\int(d\sinh ax)\right] =$

$= \frac{d}{c}.e^{-bx}(C_1\cosh ax + C_2\sinh ax) = C_{11}e^{(-b+a)x} + C_{22}e^{-(b+a)x}$

c) El caso de dos raíces imaginarias del polinomio característico.

Hago, en (4) y (6) : $R = ce^{bx}; f = 0;\ \ \Phi = d;\ \ g = ax.$ a,b,c,d ∈ IR

$Q'' + 2bQ' + (b^2 + a^2)Q = 0$;   con solución:

$Q = \frac{1}{c}e^{-bx}\left[\cos ax\int(d\cos ax) + \sin ax\int(d\sin ax)\right] =$

$= \frac{d}{c}.e^{-bx}(C_1\cos ax + C_2\sin ax) = .e^{-bx}(C_{11}\cos ax + C_{22}\sin ax)$

SOLUCION A LA ECUACION DIFERENCIAL LINEAL DE SEGUNDO ORDEN, COMPLETA, CON COEFICIENTES CONSTANTES.

Sólo resolveré un caso, si bien resuelve los tres. El caso de dos raíces imaginarias del polinomio característico.

Hago, en (4.1) y (6.1) : $R = ae^{bx};\ \ g = cx.$ a,b,c, ∈ IR

$Q'' + 2bQ' + (b^2 + c^2)Q = 0$;   con solución:

$Q = \frac{1}{c}e^{-bx}\left[\sin cx\int(a\frac{He^{bx}\cos cx}{c}) - \cos cx\int(a\frac{He^{bx}\sin cx}{c})\right] =$
$= e^{-bx}(C_1\cos ax + C_2\sin ax) + e^{-bx}\left[\sin cx\int(a\frac{He^{bx}\cos cx}{c}) - \cos cx\int(a\frac{He^{bx}\sin cx}{c})\right].$

SOLUCION A LA ECUACION DIFERNCIAL DE EULER O DE CAUCHY.

$x^2\frac{d^2y}{d^2x} + ax\frac{dy}{dx} + by = S(x)$

Sólo resolveré el caso de dos raíces reales distintas del polinomio

característico: $m^2 + (a-1)m + b = 0$, si bien resuelve los seis casos posibles.
Las raíces son:

$$m_1 = -(\tfrac{a-1}{2}) + \sqrt{(\tfrac{a-1}{2})^2 - b}\,, \quad m_2 = -(\tfrac{a-1}{2}) - \sqrt{(\tfrac{a-1}{2})^2 - b}\,.\,, \qquad \left[(\tfrac{a-1}{2})^2 - b\right] \geq 0$$

Hago en (4.1) y (6.1) : $R = ke^d$; $g = cLx$. c,d,k, ∈ IR y c es imaginario puro como veremos a continuación.
En nuestra ecuación del encabezamiento es:

$$2d+1 = a \quad ; \quad d = \tfrac{a-1}{2} \quad ; \quad c = b - (\tfrac{a-1}{2})^2$$
$$c^2 + d^2 = b \quad ; \quad c^2 = b - d^2 \quad ; \quad c = \sqrt{(\tfrac{a-1}{2})^2 - b}\; i = |c|\, i \quad ;$$

$$Q = \tfrac{1}{k}x^{-d}\left[\sin cLx \int (k\tfrac{Hx^d \cos cLx}{x^2 \frac{c}{x}}) - \cos cLx \int (k\tfrac{Hx^d \sin cLx}{x^2 \frac{c}{x}})\right] =$$

$$= \tfrac{x^{-d}}{|c|}\left[\sinh|c|Lx \int (k\tfrac{Hx^d \cosh|c|Lx}{x}) - \cosh|c|Lx \int (k\tfrac{Hx^d \sinh|c|Lx}{x})\right] =$$

$$= \tfrac{x^{-d}}{|c|}\left[(\tfrac{e^{|c|Lx} - e^{-|c|Lx}}{2})\int(\tfrac{Hx^d}{x}(\tfrac{e^{|c|Lx}+e^{-|c|Lx}}{2})) - (\tfrac{e^{|c|Lx}+e^{-|c|Lx}}{2})\int(\tfrac{Hx^d}{x}(\tfrac{e^{|c|Lx}-e^{-|c|Lx}}{2}))\right] =$$

$$= \tfrac{x^{-d}}{2|c|}\left[e^{|c|Lx}\int(\tfrac{Hx^d}{x}e^{-|c|Lx}) - e^{-|c|Lx}\int(\tfrac{Hx^d}{x}e^{|c|Lx})\right] =$$

$$= \frac{x^{-(\frac{a-1}{2})}}{2\sqrt{(\frac{a-1}{2})^2 - b}}\left[x^{\sqrt{(\frac{a-1}{2})^2-b}} \int (\frac{Hx^{(\frac{a-1}{2}) - \sqrt{(\frac{a-1}{2})^2-b}}}{x}) - x^{-\sqrt{(\frac{a-1}{2})^2-b}} \int (\frac{Hx^{(\frac{a-1}{2}) + \sqrt{(\frac{a-1}{2})^2-b}}}{x})\right] =$$

$$= C_1 x^{-(\frac{a-1}{2}) + \sqrt{(\frac{a-1}{2})^2-b}} + C_2 x^{-(\frac{a-1}{2}) - \sqrt{(\frac{a-1}{2})^2-b}} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{(a-1)^2-b}}\left[x^{-(\frac{a-1}{2}) + \sqrt{(\frac{a-1}{2})^2-b}} \int (\frac{Hx^{(\frac{a-1}{2}) - \sqrt{(\frac{a-1}{2})^2-b}}}{x}) - x^{-(\frac{a-1}{2}) - \sqrt{(\frac{a-1}{2})^2-b}} \int (\frac{Hx^{(\frac{a-1}{2}) + \sqrt{(\frac{a-1}{2})^2-b}}}{x})\right]$$

como quería demostrar.

SOLUCIONES PARTICULARES DE LA ECUACION DE BESSEL Y ECUACION TRANSFORMADA DE BESSEL.

Hago, en (4) y (6):

$$A = \tfrac{2R'}{R} - \tfrac{g''}{g'}; \qquad \tfrac{R^2}{g'} = e^{\int A}; \qquad \Phi' + \Phi\left(A - \tfrac{2R'}{R'}\right) - R^2 e^{-\int A} f = 0.$$

Obtengo:

$$Q'' + AQ' + \left[\tfrac{R''}{R} - (\tfrac{2R'}{R} - A)\tfrac{R'}{R} + R^4 e^{-2\int A}\right]Q = 0$$

Con solución:

$$Q = \frac{1}{R}\left[C_1 \cos(\int(R^2 e^{-\int A}) + C_2 \sin(\int(R^2 e^{-\int A}) \right].$$

Hago:

$$A = \frac{2p+1}{x};\quad R = bx^c \text{ con b,c,p} \in \text{IR}$$

Así:

$$Q'' + \frac{2p+1}{x}Q' + \left[b^4 x^{4c} e^{-2\int \frac{2p+1}{x}} - \frac{c}{x}\left(\frac{2c}{x} - \frac{2p+1}{x}\right) + \frac{c(c-1)}{x^2} \right]Q = 0$$

$$Q'' + \frac{2p+1}{x}Q' + \left[b^4 x^{4c-4p-2} - \frac{c}{x}\left(\frac{2c}{x} - \frac{2p+1}{x}\right) + \frac{c(c-1)}{x^2} \right]Q = 0$$

$b^4 = \alpha^2$

$$Q'' + \frac{2p+1}{x}Q' + \left[\alpha^2 x^{2r-2} + \frac{p^2-(\frac{r}{2})^2}{x^2} \right]Q = 0$$

Con solución:

$$Q = x^{-(p+\frac{r}{2})}\left[C_1 \cos(\int(\alpha x^{r-1}) + C_2 \sin(\int(\alpha x^{r-1}) \right] =$$

$$= x^{-(p+\frac{r}{2})}\left[C_1 \cos(\int \frac{\alpha x^r}{r}) + C_2 \sin(\int \frac{\alpha x^r}{r}) \right]$$

Si además:

$r = 1;\ p = 0;\ \alpha = 1.$ obtengo la ecuación de Bessel para $-n = \frac{1}{2}$-:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - (\tfrac{1}{2})^2)Y = 0 \quad \text{con solución: } Q = \frac{C_1 \cos x + C_2 \sin x}{\sqrt{x}}$$

Pueden obtenerse estas ecuaciones no homogéneas y más ecuaciones particulares eligiendo adecuadamente a las funciones R ,P ,Q ,g ,f ,Φ.
Como dije anteriormente la elección ha de ser conveniente pero no es única.
El lector podrá comprobar como ejercicio las soluciones a otras ecuaciones diferenciales cuya solución es conocida.

SOLUCION A LA ECUACION DIFERENCIAL LINEAL DE SEGUNDO ORDEN, COMPLETA, CON COEFICIENTES VARIABLES.

$\frac{d^2y}{dx} + \Psi\frac{dy}{dx} + \lambda y = H.$ con λ, Ψ, H funciones cualesquiera.

Hago en (4.0) y (6.0): $f = \varphi = QR' - g'QR + \sigma Q'' + \gamma$ con σ, γ funciones cualesquiera y suprimo el índice "0" en g_0, innecesario.

$$Q'' + \left[2R' - \frac{g''}{g'}R\right]Q' + \left[R'' - \frac{g''}{g'}R' - (g_0')^2 R\right]Q =$$
$$= \sigma Q''' + \sigma' Q'' + QR'' - g''QR - g'Q'R - g'QR' + \gamma' + (g' - \frac{g''}{g'})(\sigma Q'' + QR' - g'QR + \gamma).$$

Agrupando términos:

$$Q''' + \left[\sigma' + \sigma(g' - \frac{g''}{g'}) - R\right]\frac{Q''}{\sigma} + \left[-R' - (g' - \frac{g''}{g'})R - (g_0')^2\right]\frac{Q'}{\sigma} =$$
$$= -\frac{1}{\sigma}\left[\gamma' + \gamma(g' - \frac{g''}{g'})\right] \text{ con solución obtenida de: } Q'' - \frac{R}{\sigma}Q' = -\frac{\gamma}{\sigma};$$

$Q' = -e^{\int \frac{R}{\sigma}}\left[\int \frac{\gamma}{\sigma} e^{-\int \frac{R}{\sigma}} + C_0\right]$ con C_0 constante de integración-.

Hago: $R = \sigma'$; $z = (g' - \frac{g''}{g'})$

$Q''' + zQ'' - [\sigma'' + \sigma' z]\frac{Q'}{\sigma} = T(x)$ con solución: $Q' = \sigma\left[\left(\int (e^{-\int z} \int T(x)\sigma e^{\int z} + C_0\right) + C_1\right]$

Pero si hago: $-[\sigma'' + \sigma' z]\frac{1}{\sigma} = B$, con B una función cualquiera, $\sigma'' + \sigma' z + Bz = 0$, resulta que σ es la solución de la homogénea haciendo: $Q' = \sigma$ y T(x)=0

Conclusión:

La solución de la ecuación: $\frac{d^2y}{dx} + \Psi\frac{dy}{dx} + \lambda y = H.$

es: $$Q' = \sigma\left[\left(\int (e^{-\int \Psi} \int H\sigma e^{\int \Psi} + C_0\right) + C_1\right]$$

donde σ es la solución de su homogénea: $\frac{d^2y}{dx} + \Psi\frac{dy}{dx} + \lambda y = 0.$

La solución de la homogénea:

Proposiciónes:

a) Si σ es solución de la homogénea, también lo es: $C_0\sigma$, con C_0 una constante cualquiera.

b) Si σ es solución de la homogénea, también lo es: $C_1\sigma \int \frac{e^{-\int \Psi}}{\sigma^2}$, con C_1 una constante cualquiera.

Demostraciones:

a) - $(C_0\sigma)' = C_0\sigma'$
- $(C_0\sigma)'' = C_0\sigma''$

$$C_0\sigma'' + \Psi C_0\sigma' + C_0\lambda\sigma = C_0(\sigma'' + \Psi\sigma' + \lambda\sigma) = 0$$

b) Sea y = $\eta\sigma$,con η una función cualquiera. Derivo:
y$' = \eta'\sigma + \eta\sigma'$.Derivo: y$'' = \eta''\sigma + 2\eta'\sigma' + \eta\sigma''$ y sustituyo:

$$0 = \eta''\sigma + 2\eta'\sigma' + \eta\sigma'' + \Psi(\eta'\sigma + \eta\sigma') + \lambda\eta\sigma =$$

$$=\eta(\sigma'' + \Psi\sigma' + \lambda\sigma) + \eta''\sigma + 2\eta'\sigma' + \Psi\eta'\sigma = \sigma(\eta'' + 2\frac{\sigma'}{\sigma}\eta'' + \Psi\eta').$$

$$\frac{\eta''}{\eta'} = -(\frac{2\sigma'}{\sigma} + \Psi). \qquad \eta' = \frac{e^{\int \Psi}}{\sigma^2}C_1. \qquad y = \sigma\int(\frac{e^{\int \Psi}}{\sigma^2}C_1)$$

También haciendo H = 0 en las ecuaciones de la conclusión anterior:

$$\frac{d^2y}{dx}+\Psi\frac{dy}{dx}+\lambda y=0. \quad \text{es: } y=\sigma\left[\left(\int(e^{-\int\Psi}C_0\right)+C_1\right]$$

Propongo como solución a la solución homogénea: $\frac{d^2y}{dx}+\Psi\frac{dy}{dx}+\lambda y=0$, la siguiente:

$$\sigma=\int(e^{-\int\Psi}\int(-\lambda e^{\int\Psi}\int(e^{-\int\Psi}\int(-\lambda e^{\int\Psi}\int(e^{-\int\Psi}\int(-\lambda e^{\int\Psi}.......\infty$$

los puntos suspensivos indican que ha de realizarse infinitas veces.

$$\pi=\int(-\lambda e^{\int\Psi}\int(e^{-\int\Psi}\int(-\lambda e^{\int\Psi}\int(e^{-\int\Psi}\int(-\lambda e^{\int\Psi}.......\infty$$

$$\sigma'=e^{-\int\Psi}\int(-\lambda e^{\int\Psi}\int(e^{-\int\Psi}\int(-\lambda e^{\int\Psi}\int(e^{-\int\Psi}\int(-\lambda e^{\int\Psi}.......\infty=\pi\, e^{-\int\Psi}$$

$$\pi'=-\lambda e^{\int\Psi}\int(e^{-\int\Psi}\int(-\lambda e^{\int\Psi}\int(e^{-\int\Psi}\int(-\lambda e^{\int\Psi}.......\infty=-\lambda e^{\int\Psi}\sigma$$

$$\sigma''=e^{-\int\Psi}(-\Psi\pi-\lambda\,\sigma\,e^{\int\Psi})$$

Sustituyo:

$$e^{-\int\Psi}(-\Psi\pi-\lambda\,\sigma\,e^{\int\Psi})+\Psi\pi e^{-\int\Psi}+\lambda\,\sigma=0$$

Como demostré anteriormente, demuestro que: $\sigma_0=\sigma\int\frac{e^{-\int\Psi}}{\sigma^2}$ es también solución de la homogénea ($C_1=1$, por comodidad).

$$\sigma_0'=\pi e^{-\int\Psi}\int(\frac{e^{-\int\Psi}}{\sigma^2})+\frac{e^{-\int\Psi}}{\sigma}$$

$$\sigma_0''=e^{-\int\Psi}(-\Psi\pi-\lambda\,\sigma e^{\int\Psi})\int(\frac{e^{-\int\Psi}}{\sigma^2})+\frac{\pi\,e^{-2\int\Psi}}{\sigma^2}-\frac{e^{-\int\Psi}}{\sigma}(\Psi+\frac{\sigma'}{\sigma})$$

Sustituyo:

$$e^{-\int\Psi}(-\Psi\pi-\lambda\,\sigma e^{\int\Psi})\int(\frac{e^{-\int\Psi}}{\sigma^2})+\frac{\pi\,e^{-2\int\Psi}}{\sigma^2}-\frac{e^{-\int\Psi}}{\sigma}(\Psi+\frac{\sigma'}{\sigma})+\Psi\pi e^{-\int\Psi}\int(\frac{e^{-\int\Psi}}{\sigma^2})+$$

$$+\Psi\frac{e^{-\int\Psi}}{\sigma}+\lambda\sigma\int\frac{e^{-\int\Psi}}{\sigma^2}=(-\Psi\pi e^{-\int\Psi}-\lambda\sigma+\Psi\pi e^{-\int\Psi}+\lambda\sigma)\int\frac{e^{-\int\Psi}}{\sigma^2}+\frac{\pi\,e^{-2\int\Psi}}{\sigma^2}-e^{-\int\Psi}\frac{\pi\,e^{-\int\Psi}}{\sigma^2}=0,$$

como quería demostrar.

EXPRESION GENERAL DE LA SOLUCION A LA ECUACION DIFERENCIAL LINEAL DE SEGUNDO

ORDEN, COMPLETA, CON COEFICIENTES VARIABLES CUALESQUIERA

$\frac{d^2y}{dx} + \Psi\frac{dy}{dx} + \lambda y = H.$ con solución: $y = \sigma\left[\int(e^{-\int\Psi}\int H\,\sigma\, e^{\int\Psi})\, C_0 + C_1\right]$

con C_0, C_1, constantes de integración y σ definido anteriormente.
DEMOSTRACION

$y = \sigma I_1$ con $I_1 = \int(\frac{e^{-\int\Psi}}{\sigma^2}I_{11})$ con $I_{11} = \int H\,\sigma\, e^{\int\Psi}$

$y' = \sigma' I_1 + \frac{e^{-\int\Psi}}{\sigma}I_{11}$

$y'' = \sigma'' I_1 + \sigma'\frac{e^{-\int\Psi}}{\sigma^2}I_{11} + e^{-\int\Psi}I_{11}(\frac{-\Psi}{\sigma} - \frac{\sigma'}{\sigma^2}) + H = (\sigma'' + \Psi\sigma' + \lambda\Psi)I_1 + H = H,$

como quería demostrar.

La solución general como suma de la solución de la homogénea, más una solución particular:

$$y = \sigma\left[\int(\frac{e^{-\int\Psi}}{\sigma^2}\int H\,\sigma\, e^{\int\Psi})\right] = \sigma\left[\int(\frac{e^{-\int\Psi}}{\sigma^2}\int(H\sigma e^{\int\Psi})\right] +$$

$$+ C_0\sigma\left[\int\frac{e^{-\int\Psi}}{\sigma^2}\right] = \sigma\left[\int e^{-\int\Psi}\int H\,\sigma\, e^{\int\Psi}\right] + C_0\sigma\left[\int(\frac{e^{-\int\Psi}}{\sigma^2})\right] + C_1\sigma.$$

Solo por conveniencia en la escritura haré:

$A = e^{-\int\Psi};\quad B = -\lambda e^{\int\Psi};\quad \Psi = \frac{-A'}{A};\quad \lambda = -B\,A$

$\overline{A} = \int A\ ;\quad \overline{B} = \int B\ ;\quad \overline{AB} = \int(A\int B)\ ;\quad \overline{BA} = \int(B\int A)\ ;\quad \overline{ABA} = \int(A\int(B\int A)\ ;$

$\overline{BAB} = \int(B\int(A\int B)$: y así sucesivamente llegamos a:

$\sigma = \int(A\int(B\int(A.......\infty = \overline{ABABA........\infty}$

$\pi = \int(B\int(A\int(B.......\infty = \overline{BABAB........\infty}$

$\sigma' = A\int(B\int(A.......\infty = A\ \overline{BABAB.......\infty} = A\,\pi$

$\pi' = \int(B\int(A\int(B.......\infty = B\,\overline{ABAB........\infty} = B\,\sigma$

Una expresiòn a veces conveniente para σ se obtiene así:

$$\sigma = \overline{ABABA........\infty} = \overline{A} \quad \overline{BABA........\infty} - \int (B \ \overline{A} \quad \overline{ABAB........\infty}) = \overline{A}\, \pi - \int (B\overline{A}\, \sigma) =$$

$$= \overline{A}\, \pi - \overline{BA}\, \sigma + \int (A\, \overline{BA}\, \pi) = \overline{A}\, \pi - \overline{BA}\, \sigma + \overline{ABA}\, \pi - \int (B\, \overline{ABA}\, \sigma) =$$

$$= \overline{A}\, \pi - \overline{BA}\, \sigma + \overline{ABA}\, \pi - \overline{BABA}\, \sigma + \int (A\, \overline{BABA}\, \pi) =$$

$$= \pi(\overline{A} + \overline{ABA} + \overline{ABABA} + ...) - \sigma\, (\overline{BA} + \overline{BABA} + \overline{BABABA} + ...) -$$

$$- \int (B\, \sigma\, \overline{ABABA........\infty}.)$$

$$\sigma\, (1 + \overline{BA} + \overline{BABA} + \overline{BABABA} + ...) = \pi(\overline{A} + \overline{ABA} + \overline{ABABA} + ...) -$$

$$- \int (B\, \sigma\, \overline{ABABA........\infty}) =$$

$$= \tfrac{\sigma'}{A}(\overline{A} + \overline{ABA} + \overline{ABABA} + ...) - \int (B\, \sigma\, \overline{ABABA........\infty})$$

derivo la expresión anterior:

$$\sigma'\, (1 + \overline{BA} + \overline{BABA} + \overline{BABABA} + ...) + \sigma B\, (\overline{A} + \overline{ABA} + \overline{ABABA} + ...) =$$

$$= (\tfrac{\sigma''}{A} - \tfrac{A'}{A^2}\sigma')\, (\overline{A} + \overline{ABA} + \overline{ABABA} + ...) + \sigma'(1 + \overline{BA} + \overline{BABA} + \overline{BABABA} + ...) -$$

$$-B\, \sigma\, \overline{ABABA........\infty}$$

$$\sigma B\, (\overline{A} + \overline{ABA} + \overline{ABABA} + ...) = (\tfrac{\sigma''}{A} - \tfrac{A'}{A^2}\sigma')\, (\overline{A} + \overline{ABA} + \overline{ABABA} + ...)$$

$\sigma'' - \tfrac{A'}{A}\sigma' - AB\sigma = 0$ con solución:

$$\sigma = \overline{A} + \overline{ABA} + \overline{ABABA} + ...$$

$$\sigma' = A\, (1 + \overline{BA} + \overline{BABA} + \overline{BABABA} + ...)$$

$$\sigma'' = A'\, (1 + \overline{BA} + \overline{BABA} + \overline{BABABA} + ...) + AB\, (\overline{A} + \overline{ABA} + \overline{ABABA} + ...)$$

Sustituyo:

$$A'\, (1 + \overline{BA} + \overline{BABA} + \overline{BABABA} + ...) + AB\, (\overline{A} + \overline{ABA} + \overline{ABABA} + ...) -$$

$$-\tfrac{A'}{A}A\, (1 + \overline{BA} + \overline{BABA} + \overline{BABABA} + ...) - AB\, (\overline{A} + \overline{ABA} + \overline{ABABA} + ...) = 0$$

Así pues:

$$\sigma = \int(A\int(B\int(A.......\infty = \overline{ABABA........\infty} = \int A + \left[\int(A\int(B\int(A)\right] + ...\infty = \overline{A} + \overline{ABA} + ...\infty$$

El caso particular: $\frac{d^2y}{dx} + \lambda y = H$

De la solución general, haciendo $\Psi = 0$, $e^{-\int\Psi} = cte = 1$(por comodidad)
Con solución para la homogénea:

$$\sigma = \overline{1(-\lambda)1(-\lambda)1(-\lambda)........\infty} == \int(dx\int(-\lambda dx\int(dx......\infty =$$

$$= \int dx + \left[\int(dx\int(-\lambda dx\int dx)\right] + ...\infty = \overline{1} + \overline{1(-\lambda)1} + \overline{1(-\lambda)1(-\lambda)1} + ...$$

Con solución para la completa:

$$y = \overline{1(-\lambda)1(-\lambda).....\infty}\left[\int\left[\frac{1}{\left[\overline{1(-\lambda)1(-\lambda)).....\infty}\right]^2}\left[\int(H\ \overline{1(-\lambda)1(-\lambda)......\infty})\right] + C_0\right] + C_1\right] =$$

$$y = \sigma\left[\int(\frac{1}{\sigma^2}(\int H\sigma + C_0) + C_1\right]$$

Demostración:

$$\sigma' = 1\quad \overline{(-\lambda)1(-\lambda)1(-\lambda)........\infty}$$

$$\sigma'' = (-\lambda)\ \overline{1(-\lambda)1(-\lambda)1.......\infty} = (-\lambda)\ \sigma$$

$$y' = \overline{1(-\lambda)1(-\lambda)1(-\lambda)........\infty}\int\left[\frac{1}{(\overline{1(-\lambda)1(-\lambda)1(-\lambda)........\infty})^2}\int(H\,\overline{1(-\lambda)1(-\lambda)1(-\lambda)........\infty})\right] +$$

$$+\frac{1}{(\overline{1(-\lambda)1(-\lambda)1(-\lambda)........\infty})}\int(H\,\overline{1(-\lambda)1(-\lambda)1(-\lambda)........\infty})$$

$$y'' = (-\lambda)\ \sigma\int\left[\frac{1}{\sigma^2}\int H\sigma\right] + \frac{\overline{(-\lambda)1(-\lambda)1(-\lambda)........\infty}}{(\overline{1(-\lambda)1(-\lambda)1(-\lambda)........\infty})^2}\int(H\,\overline{1(-\lambda)1(-\lambda)1(-\lambda)........\infty}) -$$

$$-\frac{\overline{(-\lambda)1(-\lambda)1(-\lambda)........\infty}}{(\overline{1(-\lambda)1(-\lambda)1(-\lambda)........\infty})}\int(H\,\overline{1(-\lambda)1(-\lambda)1(-\lambda)........\infty}) + H$$

Sustituyo:
Para la homogénea: $\sigma'' + \lambda\sigma = -\lambda\sigma + \lambda\sigma = 0.$ $C_0 = C_1 = 0$ (por comodidad)
Para la completa:

$$(-\lambda)\sigma\int\left[\frac{1}{\sigma^2}\int H\sigma\right] + H +$$

$$+\lambda\ \overline{1(-\lambda)1(-\lambda)1(-\lambda)........\infty}\int\left[\frac{1}{(\overline{1(-\lambda)1(-\lambda)1(-\lambda)........\infty})^2}\int(H\,\overline{1(-\lambda)1(-\lambda)1(-\lambda)........\infty})\right] =$$

$=(-\lambda)\sigma\int\left[\frac{1}{\sigma^2}\int H\sigma\right]+H+\lambda\,\sigma\int\left[\frac{1}{\sigma^2}\int H\sigma\right]=H$

Es ahora momento de introducir lo siguiente:

La utilización de la expresión: $\sigma=\int A+\left[\int(A\int(B\int A)\right]+.....\infty=\overline{A}+\overline{ABA}+....\infty$
no presenta mayor incoveniente que el que se presenta cuando nos tropezamos con una integral cuya primitiva no esconocida, pero ese problema aparece ya en la ecuación diferencial más simple: $y'-A=0$.

Con este método podemos, a veces, esquivar ese inconveniente, que se nos presenta, por ejemplo cuando intentamos obtener la solución de la ecuación diferencial de HERMITE:
$y"-2\,x\,y'+2\,n=0.$ puesto que ya desde un principio es: $\int A=\int(e^{-\int\Psi})=\int e^{x^2}$

Veamos cómo:

Hago: $y=z\,w$, con z y w dos funciones cualesquiera.

$$y'=z'\,w+z\,w'$$

$$y"=z"\,w+z\,w"+2\,z'\,w'$$

Sustituyo:

$$z"\,w+z\,w"+2\,z'\,w'+\Psi\,(\,z'\,w+z\,w'\,)+\lambda\,z\,w=0$$

$$z"+z'(2\,\tfrac{w'}{w}+\Psi\,)\,+z\,\left(\,\tfrac{w"}{w}+\Psi\,(\,\tfrac{w'}{w})+\lambda\,\right)\,=0$$

Donde ahora una elección conveniente pero no única sería:

$$2\,\tfrac{w'}{w}+\Psi=0.$$

y tendría que resolver la ecuación diferencial siguiente:

$$z"+z\,\left(\,\tfrac{w''}{w}+\Psi\,(\,\tfrac{w'}{w})+\lambda\,\right)\,=z"+z\,(\,(\tfrac{w'}{w})'+(\tfrac{w'}{w})^2+\Psi\,(\,\tfrac{w'}{w})+\lambda\,)\;=$$

$$z"+z\left[(-\tfrac{\Psi}{2})'+(\tfrac{\Psi}{2})^2+\Psi(\tfrac{-\Psi}{2})+\lambda\right]=z"+z\left[(-\tfrac{\Psi}{2})'-\tfrac{\Psi^2}{4}+\lambda\right]=0$$

solucionándose ese inconveniente al ser ahora, nuestra nueva σ_z :

$$\sigma_z=\int(dx\int(\left[(\tfrac{\Psi}{2})'+\tfrac{\Psi^2}{4}-\lambda\right]\int(dx\int\left[(\tfrac{\Psi}{2})'+\tfrac{\Psi^2}{4}-\lambda\right]\int(.......\infty=$$

$$=\overline{1\,(\left[(\tfrac{\Psi}{2})'+\tfrac{\Psi^2}{4}-\lambda\right])\,1\,(\left[(\tfrac{\Psi}{2})'+\tfrac{\Psi^2}{4}-\lambda\right])\,1}........\infty=$$

$$= \int dx + \Big[\int(\int(\Big[(\tfrac{\Psi}{2})' + \tfrac{\Psi^2}{4} - \lambda\Big]dx\int dx)\Big] + ...\infty =$$

$$= \overline{1} + \overline{1(\Big[(\tfrac{\Psi}{2})' + \tfrac{\Psi^2}{4} - \lambda\Big])1} + ...\infty$$

ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR A DOS, COMPLETAS, CON COEFICIENTES VARIABLES CUALESQUIERA.

Solución a la ecuación diferencial completa de orden tres con coeficientes variables cualesquiera:
Partimos de las expresiones siguientes de la página 9:

$$Q''' + \Big[\sigma' + \sigma(g' - \tfrac{g''}{g'}) - R\Big]\tfrac{Q''}{\sigma} + \Big[-R' - (g' - \tfrac{g''}{g'})R - (g_0')^2\Big]\tfrac{Q'}{\sigma} =$$

$= -\frac{1}{\sigma}\Big[\gamma' + \gamma(g' - \frac{g''}{g'})\Big]$ con solución obtenida de: $Q'' - \frac{R}{\sigma}Q' = -\frac{\gamma}{\sigma}$;

$Q' = -e^{\int\frac{R}{\sigma}}\Big[\int\frac{\gamma}{\sigma}e^{-\int\frac{R}{\sigma}} + C_0\Big]$ con C_0 constante de integración-.

Hago:

$\gamma = \eta Q + \omega$ con $\eta, \omega,$ funciones cualesquiera.

$(g' - \frac{g''}{g'}) = z$

$R = g'$ y obtengo:

$Q''' - \frac{Q''}{\sigma}(\sigma'' + z\sigma' - \eta) + (\eta' + z\eta)\frac{Q'}{\sigma} = -\frac{1}{\sigma}(\omega' + z\omega) = H$ con: $\omega = -e^{-\int z}\int(H\sigma e^{\int z})$.

con solución obtenida de: $Q'' - \frac{\sigma'}{\sigma}Q' + \frac{\eta}{\sigma}Q = -\frac{\omega}{\sigma}$; que, como demostré anteriormente en las ecuaciones diferenciales de segundo orden completas, es:

$Q = \sigma_{02}\Bigg[\int\frac{\sigma}{\sigma_{02}^2}\Bigg[\int(\frac{\sigma_{02}e^{-\int z}}{\sigma^2}\int\Big[H\sigma e^{\int z}) + C_0\Big] + C_1\Bigg] + C_2\Bigg]$ con: $C_0, C_1, C_2,$

cosntantes de integracion, y: $\sigma_{02} = \int(\sigma\int(\frac{-\eta}{\sigma^2}\int(\sigma\int(\frac{-\eta}{\sigma^2}\int........\infty$
Conforme pretendo solucionar ecuaciones de orden superior se complica la escritura de las expresiones y por eso utilizaré la simbología que yo he introducido anteriormente.

$Q = \sigma_{02}\overline{ABC} + C_0\sigma_{02}\overline{AB}\sigma_{02} + C_1\sigma_{02}\overline{A} + C_2\sigma_{02} =$

$$= C_2\sigma_{02} + C_1\sigma_{02}\int(\tfrac{\sigma}{\sigma_{02}^2}) + C_2\sigma_{02}\left[\int(\tfrac{\sigma}{\sigma_{02}^2}\int(\frac{\sigma_{02}\, e^{-\int z}}{\sigma^2})\right] + \sigma_{02}\left[\int(\tfrac{\sigma}{\sigma_{02}^2}\int(\frac{\sigma_{02}\, e^{-\int z}}{\sigma^2}\int(\sigma H e^{-\int z})\right]$$

Esta expresión de la solución indica, como no podía ser de otra manera, que está compuesta por la combinación lineal de tres soluciones linealmente independientes de su homogénea, más una solución particular; y lo demostraré a continuación.

La primera solución para la homogénea: σ_{02}

$$\sigma'_{02} = \sigma\int(-\eta\tfrac{\sigma_{02}}{\sigma^2});$$

$$\sigma''_{02} = \sigma'\int(-\eta\tfrac{\sigma_{02}}{\sigma^2}) - \tfrac{\eta}{\sigma}\sigma_{02};$$

$$\sigma'''_{02} = \sigma''\int(-\eta\tfrac{\sigma_{02}}{\sigma^2}) - \tfrac{\eta\sigma'}{\sigma^2}\sigma_{02} - \tfrac{\sigma_{02}}{\sigma}(\eta' + \tfrac{\sigma'}{\sigma}\eta) - \tfrac{\eta}{\sigma}\sigma_{02} =$$

$$= \sigma''\int(-\eta\tfrac{\sigma_{02}}{\sigma^2}) - \tfrac{\eta'}{\sigma}\sigma_{02} - \tfrac{\sigma'_{02}}{\sigma}\eta$$

Sustituyoen la homogénea:

$$\sigma''\int(-\eta\tfrac{\sigma_{02}}{\sigma^2}) - \tfrac{\eta'}{\sigma}\sigma_{02} - \tfrac{\sigma'_{02}}{\sigma}\eta + z(\sigma'\int(-\eta\tfrac{\sigma_{02}}{\sigma^2}) - \tfrac{\eta}{\sigma}\sigma_{02}) - \tfrac{(\sigma''+z\sigma'-\eta)}{\sigma}\sigma\int(-\eta\tfrac{\sigma_{02}}{\sigma^2}) + \tfrac{(\eta'+z\eta)}{\sigma}\sigma_{02} =$$

$$= \left[\int(-\eta\tfrac{\sigma_{02}}{\sigma^2})\right](\sigma'' + z\sigma' - \tfrac{(\sigma''+z\sigma'-\eta)}{\sigma}\sigma) - \tfrac{\sigma'_{02}}{\sigma}\eta =$$

$$=\left[\int(-\eta\tfrac{\sigma_{02}}{\sigma^2})\right](\sigma'' + z\sigma' - (\sigma'' + z\sigma' - \eta) - \eta) = 0.$$

La segunda solución para la homogénea: $\sigma_{02}\int(\frac{\sigma}{\sigma_{02}^2})$

$$(\sigma_{02}\int(\tfrac{\sigma}{\sigma_{02}^2}))' = \sigma'_{02}\int(\tfrac{\sigma}{\sigma_{02}^2}) + \tfrac{\sigma}{\sigma_{02}}.$$

$$(\sigma_{02}\int(\tfrac{\sigma}{\sigma_{02}^2}))'' = \sigma''_{02}\int(\tfrac{\sigma}{\sigma_{02}^2}) + \tfrac{\sigma'}{\sigma_{02}}$$

$$(\sigma_{02}\int(\tfrac{\sigma}{\sigma_{02}^2}))''' = \sigma'''_{02}\int(\tfrac{\sigma}{\sigma_{02}^2}) + \tfrac{\sigma''}{\sigma_{02}} + \sigma''_{02}\tfrac{\sigma}{\sigma_{02}^2} - \sigma'_{02}\tfrac{\sigma'}{\sigma_{02}^2}$$

Sustituyo en la homogénea:

$$\sigma'''_{02}\int(\tfrac{\sigma}{\sigma_{02}^2}) + \tfrac{\sigma''}{\sigma_{02}} + \sigma''_{02}\tfrac{\sigma}{\sigma_{02}^2} - \sigma'_{02}\tfrac{\sigma'}{\sigma_{02}^2} + z\,(\sigma''_{02}\int(\tfrac{\sigma}{\sigma_{02}^2}) + \tfrac{\sigma'}{\sigma_{02}}) - \tfrac{(\sigma''+z\sigma'-\eta)}{\sigma}(\sigma'_{02}\int(\tfrac{\sigma}{\sigma_{02}^2}) + \tfrac{\sigma}{\sigma_{02}}) +$$

$$+\tfrac{(\eta'+z\eta)}{\sigma}\sigma_{02}\int(\tfrac{\sigma}{\sigma_{02}^2}) = \left[\sigma_{02}\int(\tfrac{\sigma}{\sigma_{02}^2})\right](\sigma'''_{02} + z\sigma''_{02} - \tfrac{(\sigma''+z\sigma'-\eta)}{\sigma}\sigma'_{02} + \tfrac{(\eta'+z\eta)}{\sigma}\sigma_{02}) +$$

$$+\sigma''_{02}\tfrac{\sigma}{\sigma_{02}^2} - \sigma'_{02}\tfrac{\sigma'}{\sigma_{02}^2} - \tfrac{\eta}{\sigma_{02}} = (\tfrac{\sigma}{\sigma_{02}})^2(\tfrac{\sigma'_{02}}{\sigma})' + \tfrac{\eta}{\sigma_{02}} = \tfrac{\sigma^2}{\sigma_{02}^2}(\tfrac{-\eta}{\sigma^2}\sigma_{02}) + \tfrac{\eta}{\sigma_{02}} = 0.$$

La tercera solución para la homogénea: $\sigma_{02}\int(\frac{\sigma}{\sigma_{02}^2}\int(\frac{\sigma_{02}\, e^{-\int z}}{\sigma^2})$

$\sigma_{02}\int(\frac{\sigma}{\sigma_{02}^2}\int(\frac{\sigma_{02}\, e^{-\int z}}{\sigma^2}) = \sigma_{02}\, I_1$, con $I_1 = \int(\frac{\sigma}{\sigma_{02}^2} I_2)$ con $I_2 = \int(\frac{\sigma_{02}\, e^{-\int z}}{\sigma^2})$

$$(\sigma_{02}\int(\frac{\sigma}{\sigma_{02}^2}\int(\frac{\sigma_{02}\, e^{-\int z}}{\sigma^2}))' = \sigma'_{02}\, I_1 + \frac{\sigma}{\sigma_{02}}\, I_2$$

$$(\sigma_{02}\int(\frac{\sigma}{\sigma_{02}^2}\int(\frac{\sigma_{02}\, e^{-\int z}}{\sigma^2}))'' = \sigma''_{02}\, I_1 + \sigma'_{02}\frac{\sigma}{\sigma_{02}^2}\, I_2 + (\frac{\sigma'}{\sigma_{02}} - \frac{\sigma\sigma'_{02}}{\sigma_{02}^2}) I_2 + \frac{e^{-\int z}}{\sigma} = \sigma''_{02} I_1 + \frac{\sigma'}{\sigma_{02}} I_2 + \frac{e^{-\int z}}{\sigma};$$

$$(\sigma_{02}\int(\frac{\sigma}{\sigma_{02}^2}\int(\frac{\sigma_{02}\, e^{-\int z}}{\sigma^2}))''' = \sigma'''_{02}\, I_1 + (\frac{\sigma''_{02}\sigma}{\sigma_{02}^2} + \frac{\sigma''}{\sigma_{02}} - \frac{\sigma'_{02}\sigma'}{\sigma_{02}^2})\, I_2 + \frac{\sigma'}{\sigma^2} e^{-\int Z} - (\frac{z}{\sigma} + \frac{\sigma'}{\sigma^2})\, e^{-\int Z} =$$

$$= \sigma'''_{02}\, I_1 + (\frac{\sigma''_{02}\sigma}{\sigma_{02}^2} + \frac{\sigma''}{\sigma_{02}} - \frac{\sigma'_{02}\sigma'}{\sigma_{02}^2})\, I_2 - \frac{z}{\sigma} e^{-\int Z}.$$

Sustituyo en la homogénea:

$$\sigma'''_{02} I_1 + (\frac{\sigma''_{02}\sigma}{\sigma_{02}^2} + \frac{\sigma''}{\sigma_{02}} - \frac{\sigma'_{02}\sigma'}{\sigma_{02}^2})\, I_2 - \frac{z}{\sigma} e^{-\int Z} + z\,(\sigma''_{02} I_1 + \frac{\sigma'}{\sigma_{02}} I_2 + \frac{e^{-\int z}}{\sigma}) - \frac{(\sigma''+z\sigma'-\eta)}{\sigma}(\sigma'_{02} I_1 + \frac{\sigma}{\sigma_{02}} I_2) +$$

$$+ \frac{(\eta'+z\eta)}{\sigma}\sigma_{02} =$$

$$= I_1\left[\sigma'''_{02} + z\sigma''_{02} - \frac{(\sigma''+z\sigma'-\eta)}{\sigma}\sigma'_{02} + \frac{(\eta'+z\eta)}{\sigma}\sigma_{02}\right] + I_2\left[\frac{\sigma''_{02}\sigma}{\sigma_{02}^2} + \frac{\sigma''}{\sigma_{02}} - \frac{\sigma'_{02}\sigma'}{\sigma_{02}^2} + z\frac{\sigma'}{\sigma_{02}} - \frac{(\sigma''+z\sigma'-\eta)}{\sigma}\ \frac{\sigma}{\sigma_{02}}\right] =$$

$$= I_2\left[\frac{\sigma''_{02}\sigma}{\sigma_{02}^2} - \frac{\sigma'_{02}\sigma'}{\sigma_{02}^2} - \frac{(-\eta)}{\sigma}\ \frac{\sigma}{\sigma_{02}}\right] = I_2\left[\frac{\sigma^2}{\sigma_{02}^2}(\frac{\sigma'_{02}}{\sigma})' + \frac{\eta}{\sigma_{02}})\right] = I_2\left[\frac{\sigma^2}{\sigma_{02}^2}(\frac{-\eta\,\sigma_{02}^2}{\sigma^2}) + \frac{\eta}{\sigma_{02}})\right] = 0$$

La solución particular: $\sigma_{02}\int(\frac{\sigma}{\sigma^2}\int(\frac{\sigma_{02}\, e^{-\int z}}{\sigma^2}\int\sigma H e^{-\int Z})$

$\sigma_{02}\int(\frac{\sigma}{\sigma_{02}^2}\int(\frac{\sigma_{02}\, e^{-\int z}}{\sigma^2}\int\sigma H e^{-\int Z}) = \sigma_{02} I_1$ con: $I_1 = \int(\frac{\sigma}{\sigma_{02}^2} I_2)$ con $I_2 = \int(\frac{\sigma_{02}\, e^{-\int z}}{\sigma^2} I_3)$

con: $I_3 = \int(\sigma H e^{-\int Z})$.

$$(\sigma_{02} I_1)' = \sigma'_{02} I_1 + \frac{\sigma}{\sigma_{02}} I_2$$

$$(\sigma_{02} I_1)'' = \sigma''_{02} I_1 + (\frac{\sigma'\sigma'_{02}}{\sigma_{02}^2} + \frac{\sigma'}{\sigma_{02}} - \frac{\sigma'\sigma'_{02}}{\sigma_{02}^2}) I_2 + \frac{e^{-\int z}}{\sigma} I_3 = \sigma''_{02} I_1 + \frac{\sigma'}{\sigma_{02}} I_2 + \frac{e^{-\int z}}{\sigma} I_3$$

$$(\sigma_{02}I_1)''' = \sigma_{02}'''I_1 + (\frac{\sigma\sigma''_{02}}{\sigma_{02}^2} + \frac{\sigma''}{\sigma_{02}} - \frac{\sigma'\sigma'_{02}}{\sigma_{02}^2})I_2 + (\frac{\sigma'}{\sigma^2} - \frac{z}{\sigma} - \frac{\sigma'}{\sigma^2})e^{-\int Z}I_3 + H =$$

$$= \sigma_{02}'''I_1 + (\frac{\sigma\sigma''_{02}}{\sigma_{02}^2} + \frac{\sigma''}{\sigma_{02}} - \frac{\sigma'\sigma'_{02}}{\sigma_{02}^2})I_2 - \frac{z}{\sigma}e^{-\int Z}I_3 + H$$

Sustituyo en la general:

$$\sigma_{02}'''\, I_1 + (\frac{\sigma\sigma''_{02}}{\sigma_{02}^2} + \frac{\sigma''}{\sigma_{02}} - \frac{\sigma'\sigma'_{02}}{\sigma_{02}^2})\, I_2 - \frac{z}{\sigma}\, I_3\, e^{-\int Z} + H +$$

$$+ z\,(\sigma''_{02}I_1 + \frac{\sigma'}{\sigma_{02}}I_2 + \frac{1}{\sigma}\, I_3\, e^{-\int Z}) - \frac{(\sigma''+z\sigma'-\eta)}{\sigma}\,(\sigma'_{02}I_1 + \frac{\sigma}{\sigma_{02}}I_2) + \frac{(\eta'+z\eta)}{\sigma}\,\sigma_{02}\, I_1 =$$

$$= I_1\Big[\sigma_{02}''' + z\sigma''_{02} - \frac{(\sigma''+z\sigma'-\eta)}{\sigma}\sigma'_{02} + \frac{(\eta'+z\eta)}{\sigma}\sigma_{02}\Big] + I_2\Big[\frac{\sigma\sigma''_{02}}{\sigma_{02}^2} - \frac{\sigma'\sigma'_{02}}{\sigma_{02}^2} + \frac{\eta}{\sigma_{02}^2}\Big] +$$

$$+ I_3[-\frac{z}{\sigma} + \frac{z}{\sigma}]\, e^{-\int Z} + H = H$$

y queda demostrado.

Cálculo de η y σ :

Hago:

$$-\frac{1}{\sigma}(\sigma'' + z\sigma' - \eta) = p$$

$$\frac{1}{\sigma}(\eta' + z\eta) = q$$

Operando en ellas:

$$\eta = e^{-\int z}\int(\sigma T e^{\int z})$$

$$\sigma'' + z\sigma' + p\sigma = e^{-\int z}\int(\sigma q e^{\int z}); \quad \sigma''' + z'\sigma' + z\sigma'' + p\sigma' + p'\sigma + z(\sigma'' + z\sigma' + p\sigma) = \sigma q;$$

$$\sigma''' + 2\, z\sigma'' + \sigma'(z' + z^2 + p) + \sigma(p' + zp - q) = 0$$

Es decir, σ es una solución para la homogénea:

$\sigma''' + 2z\sigma'' + \sigma'(z' + z^2 + p) + \sigma(p' + zp - q) = 0$ y forma parte de la solución de la ecuación

diferencial que ahora se escribe:

$$Q''' + zQ'' + pQ' + qQ = H$$

Al igual que intuí- página 12- que la solución para la homogénea en la ecuación diferencial de segundo orden era:

$\sigma = \int(A\int(B\int(A.......\infty = \overline{ABABA........\infty}$ ahora propongo comos solución de la homogénea de tercer orden:

$$\sigma = \int(A\int(B\int(C\int(A\int(B\int(C.......\infty = \overline{ABCABC........\infty}$$

$$\sigma' = A\int(B\int(C\int(A\int(B\int(C.......\infty = A\ \overline{BCABC........\infty}$$

$$\sigma" = A'\int(B\int(C\int(A\int(B\int(C.......\infty + AB\int(C\int(A\int(B\int(C.......\infty =$$

$$= A'\ \overline{BCABC........\infty} + AB\ \overline{BCABC........\infty}$$

$$\sigma''' = A''\int(B\int(C\int(A\int(B\int(C.......\infty + AB\int(C\int(A\int(B\int(C.......\infty =$$

$$= A'\ \overline{BCABC........\infty} + 2\,A'B\ \overline{CABC........\infty} + AB'\ \overline{CABC........\infty} + ABC\sigma.$$

y sustituyo:

$$A'\ \overline{BCABC........\infty} + 2\,A'B\ \overline{CABC........\infty} + AB'\ \overline{CABC........\infty} + ABC\sigma +$$

$$+2z\,(A'\ \overline{BCABC........\infty} + AB\ \overline{BCABC........\infty}\,)\ +$$

$$+(z' + z^2 + p)\,A\ \overline{BCABC........\infty} + \sigma(p' + zp - q)\,\sigma = 0.$$

Operando en la igualdad anterior:

$$ABC = q - p' - zp$$

$$A" + 2\,zA' + A(z' + z^2 + p) = 0$$

$$2\,A'B + AB' + 2\,zAB = 0$$

Soluciono el sistema de tres ecuaciones con las tres incógnitas: A, B y C

$$B = \frac{e^{-2\int z}}{A^2};\quad A = \int(e^{-2\int z}\int(-(z' + z^2 + p)\,e^{2\int z}\int(e^{-2\int z}\int(-(z' + z^2 + p)\,e^{2\int z}\int......\infty;$$

$$C = (q - p' - zp)\,e^{2\int z}\left[\int(e^{-2\int z}\int(-(z' + z^2 + p)e^{2\int z}\int(e^{-2\int z}\int(-(z' + z^2 + p)e^{2\int z}\int......\infty\right]$$

Obtenida σ, obtendría η, y con ambas: σ_{02} para con las tres obtener finalmente Q. Razonablemente, la obtención de las siguientes ecuaciones diferenciales lieneales de órdenes superiores requie del mismo procedimiento seguido anteriormente. Obtenida la solución para la ecuación diferencial de tercer orden, obtengo la de cuarto orden y así sucesivamente.

El caso particular: $A = B = M'$ en: $\sigma = \int(A\int(B\int(A\int(B\int......\infty = \overline{ABAB........\infty}$
en la ecuación diferencial lineal de segundo orden, requiere una mención especial:

$$\sigma = \int(A\int(B\int(A\int(B\int.......\infty = \overline{ABAB........\infty} = \sigma =$$

$$=\int(M'\int(M'\int(M'\int.......\infty = \overline{M'M'M'........\infty} =$$

$$=M\sigma - \tfrac{M^2}{2!}\sigma + \int \tfrac{M^2}{2!}M'\sigma = M\sigma - \tfrac{M^2}{2!}\sigma + \tfrac{M^3}{3!}\int \tfrac{M^3}{3!}M'\sigma =$$

$$=\sigma \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}(\tfrac{M^n}{n!}) + \int((-1)^{n+1}\tfrac{M^n}{n!}M'\sigma) \qquad (\text{ n}\in\text{IN y n} \rightarrow \infty\text{ })$$

$$\sigma\ (1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n(\tfrac{M^n}{n!}) = \int((-1)^{n+1}\tfrac{M^n}{n!}M'\sigma) + C_0 = \sigma \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n(\tfrac{M^n}{n!})$$

Por otra parte es:

$\sigma' = M'\sigma;\quad \frac{\sigma'}{\sigma} = M';\quad \sigma = k\,e^M\ \ k = constante = 1$(por comodidad)

$$e^{-M} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\ \frac{M^n}{n!}}{\int((-1)^{n+1}\frac{M^n}{n!}M'e^M)+C_0}$$

Si M es una función tal que si $\forall\ x \in$ Dominio$\{M\}$ es: $\lim_{n\to\infty} ((-1)^{n+1}\frac{M^n}{n!}M'e^M) = 0$

se cumple que: $e^{-M} = \frac{1}{C_0}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n(\frac{M^n}{n!})$.

Veamos algunos ejemplos.

M=ax

$$\lim_{n\to\infty} ((-1)^{n+1}\tfrac{(ax)^n}{n!}ae^{ax}) = 0;\quad e^{-ax} =\sum_{n=0}^{\infty} (\ (-1)^n\tfrac{a^nx^n}{n!}) = 1 - \tfrac{a}{1!}x + \tfrac{a^2}{2!}x^2 - \tfrac{a^3}{3!}x^3 + ...\infty$$

El caso: $a = 1$........... $e^{-x} = 1 - \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + ...\infty$

$a = -1$..........$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + ...\infty$

$a = i$...........$e^x = 1 - \frac{i}{1!}x + \frac{i^2}{2!}x^2 - \frac{i^3}{3!}x^3 + ...\infty =$

$= (1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + ...\infty) - i(\frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + ...\infty) =$

$= \cos x - i \sin x.$

EJEMPLOS:

Voy a resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{X}\frac{dy}{dx} + x^p\, y = H \qquad p \in IR,\ \ p > (-1)$$

solución de la homogénea: $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + x^p\, y = 0$

1° término)

$$\int (e^{-\int -\frac{1}{X}}) = \int x = \frac{X^2}{2}$$

2° término)

$$\int (x \int (x^{p-1} \int x) = \int (x \int (x^{p-1} \frac{X^2}{2}) = \frac{1}{2} \int (x \int (x^{p+1}) = \frac{1}{2} \int \frac{X^{p+3}}{p+2} = \frac{X^{p+4}}{2(p+2)(p+4)}$$

3° término)

$$\int (x \int (x^{p-1} \int (x \int (x^{p-1} \int x) = \int (x \int (x^{p-1} \frac{X^{p+4}}{2(p+2)(p+4)}) = \int (\frac{X^{2P+4}}{2(p+3)(p+4)(2p+4)}) = \frac{X^{2P+6}}{2(p+3)(p+4)(2p+4)(2p+6)}$$

4°término)

$$\int (x \int (x^{p-1} \int (x \int (x^{p-1} \int (x \int (x^{p-1} \int x) = \frac{X^{3P+8}}{2(p+3)(p+4)(2p+4)(2p+6)(3p+6)(3p+8)}$$

solución:

$$\sigma = \frac{1}{2}(x^2 + \frac{X^{p+4}}{(p+2)(p+4)} + \frac{X^{2P+6}}{(p+2)(p+4)(2p+4)(2p+6)} + \frac{X^{3P+8}}{(p+2)(p+4)(2p+4)(2p+6)(3p+6)(3p+8)} + \ldots..\infty)$$

comprobación:

$$\sigma' = \frac{1}{2}(2x + \frac{X^{p+3}}{(p+2)} + \frac{X^{2P+5}}{(p+2)(p+4)(2p+4)} + \frac{X^{3P+7}}{(p+2)(p+4)(2p+4)(2p+6)(3p+6)} + \ldots\ldots\ldots.\infty)$$

$$\sigma'' = \frac{1}{2}(2 + \frac{(p+3)\, X^{p+2}}{(P+2)} + \frac{(2p+5)\, X^{2P+4}}{(p+2)(p+4)(2p+4)} + \frac{(3p+7)\, X^{3P+6}}{(p+2)(p+4)(2p+4)(2p+6)(3p+6)} + \ldots\ldots\infty)$$

sustiuyo:

$$0 = -\frac{1}{2}x^p(x^2 + \frac{X^{p+4}}{(p+2)(p+4)} + \frac{X^{2P+6}}{(p+2)(p+4)(2p+4)(2p+6)} + \frac{X^{3P+8}}{(p+2)(p+4)(2p+4)(2p+6)(3p+6)(3p+8)} + \ldots\infty) -$$

$$-\frac{1}{2X}(2x+\frac{X^{p+3}}{(p+2)}+\frac{X^{2P+5}}{(p+2)(p+4)(2p+4)}+\frac{X^{3P+7}}{(p+2)(p+4)(2p+4)(2p+6)(3p+6)}+.....\infty)+$$

$$+\frac{1}{2}(2+\frac{(p+3)\,X^{p+2}}{(P+2)}+\frac{(2p+5)\,X^{2P+4}}{(p+2)(p+4)(2p+4)}+\frac{(3p+7)\,X^{3P+6}}{(p+2)(p+4)(2p+4)(2p+6)(3p+6)}+.....\infty)=$$

$$=\frac{1}{2}((-2+2)+x^{p+2}(-1-\frac{1}{p+2}+\frac{p+3}{p+2})+x^{2p+4}(-\frac{1}{(p+2)(p+4)}-\frac{1}{(p+2)(p+4)(2p+4)}+\frac{(2p+5)}{(p+2)(p+4)(2p+4)})+$$

$$+x^{3p+6}(-\frac{1}{(p+2)(p+4)(2p+4)(2p+6)}-\frac{1}{(p+2)(p+4)(2p+4)(2p+6)(3p+6)}+\frac{3p+7}{(p+2)(p+4)(2p+4)(2p+6)(3p+6)})+....\infty=$$

$$=\frac{1}{2}(0+0\,x^{p+2}+0\,x^{3p+6}+0\,x^{4p+8}+o+..........$$

Una vez obtenida σ se obtiene σ_0, como he indicado en páginas anteriores, y con ambas, la solución general.

Aprovechando este mismo ejemplo, hago:

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{2}{X}\frac{dy}{dx}+x^p\,y=H$$

solución de la homogénea: $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{2}{X}\frac{dy}{dx}+x^p\,y=0$

1º término)

$$\int(e^{-\int-\frac{2}{X}})=\int x^2=\frac{X^3}{3}$$

2º término)

$$\int(x^2\int(x^{p-2}\int x^2)=\int(x^2\int(x^{p-2}\frac{X^3}{3}))=\frac{1}{3}\int(x^2\int(x^{p+1}))=\frac{1}{3}\int\frac{X^{p+4}}{p+2}=\frac{X^{p+5}}{3(p+2)(p+5)}$$

3º término)

$$\int(x^2\int(x^{p-2}\int(x^2\int(x^{p-2}\int x^2)=\int(x^2\int(x^{p-2}\frac{X^{p+5}}{3(p+2)(p+5)})=\int(\frac{X^{2P+6}}{3(p+2)(p+5)(2p+4)})=\frac{X^{2P+7}}{3(p+2)(p+5)(2p+4)(2p+7)}$$

4ºtérmino)

$$\int(x^2\int(x^{p-2}\int(x^2\int(x^{p-2}\int(x^2\int(x^{p-2}\int x^2)=\frac{X^{3P+9}}{3(p+2)(p+5)(2p+4)(2p+7)(3p+6)(3p+9)}$$

solución:

$$\sigma=\frac{1}{3}(x^3+\frac{X^{p+5}}{(p+2)(p+5)}+\frac{X^{2P+7}}{(p+2)(p+5)(2p+4)(2p+7)}+\frac{X^{3P+9}}{(p+2)(p+5)(2p+4)(2p+7)(3p+6)(3p+9)}+...\infty)$$

comprobación:

$$\sigma' = \frac{1}{3}(3x^2 + \frac{X^{p+4}}{(p+2)} + \frac{X^{2P+6}}{(p+2)(p+5)(2p+4)} + \frac{X^{3P+8}}{(p+2)(p+5)(2p+4)(2p+7)(3p+6)} + ...\infty)$$

$$\sigma'' = \frac{1}{3}(6x + \frac{(p+4)\,X^{p+3}}{(p+2)} + \frac{(2p+6)\,X^{2P+6}}{(p+2)(p+5)(2p+4)} + \frac{(3P+8)\,X^{3P+7}}{(p+2)(p+5)(2p+4)(2p+7)(3p+6)} + ...\infty)$$

sustiuyo:

$$0 = -\frac{X^p}{3}(x^3 + \frac{X^{p+5}}{(p+2)(p+5)} + \frac{X^{2P+7}}{(p+2)(p+5)(2p+4)(2p+7)} + \frac{X^{3P+9}}{(p+2)(p+5)(2p+4)(2p+7)(3p+6)(3p+9)} + ...\infty) -$$

$$-\frac{2}{3X}(3x^2 + \frac{X^{p+4}}{(p+2)} + \frac{X^{2P+6}}{(p+2)(p+5)(2p+4)} + \frac{X^{3P+8}}{(p+2)(p+5)(2p+4)(2p+7)(3p+6)} + ...\infty) +$$

$$+\frac{1}{3}\,(6x + \frac{(p+4)\,X^{p+3}}{(p+2)} + \frac{(2p+6)\,X^{2P+5}}{(p+2)(p+5)(2p+4)} + \frac{(3p+8)\;X^{3P+7}}{(p+2)(p+5)(2p+4)(2p+7)(3p+6)} + ...\infty)$$

$$= \frac{1}{3}((-2+2)\,x + x^{p+3}(-1 - \frac{2}{p+2} + \frac{p+4}{p+2}) + x^{2p+5}(-\frac{1}{(p+2)(p+5)} - \frac{2}{(p+2)(p+5)(2p+4)} + \frac{(2p+6)}{(p+2)(p+5)(2p+4)}) +$$

$$+x^{3p+7}(-\frac{1}{(p+2)(p+5)(2p+4)(2p+7)} - \frac{2}{(p+2)(p+5)(2p+4)(2p+7)(3p+6)} + \frac{3p+8}{(p+2)(p+5)(2p+4)(2p+7)(3p+6)}) + ..\infty$$

$$= \frac{1}{3}(0 + 0\;x^{p+3} + 0\;x^{2p+5} + 0\;x^{3p+7} + 0..........$$

Al igual que anteriormente, una vez obtenida σ se obtiene σ_0, , y con ambas, la solución general.

Voy a resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \Psi\frac{dy}{dx} - e^{-2\int\Psi}\,y = H$$

$$\sigma = \int(e^{-\int\Psi}\int(e^{-\int\Psi}\int(e^{-\int\Psi}\int(e^{-\int\Psi}............\infty$$

$$\sigma' = e^{-\int\Psi}\int(e^{-\int\Psi}\int(e^{-\int\Psi}\int(e^{-\int\Psi}............\infty = \sigma e^{-\int\Psi}$$

$$\sigma = e^{\int(e^{-\int\Psi})}$$

$$\sigma_0 = \sigma\int\frac{e^{-\int\Psi}}{\sigma^2} = e^{\int(e^{-\int\Psi})}\int(\frac{e^{-\int\Psi}}{\left[e^{\int(e^{-\int\Psi})}\right]^2}) = e^{\int(e^{-\int\Psi})}\int(\frac{e^{-\int\Psi}}{e^{2\int(e^{-\int\Psi})}}) = e^{\int(e^{-\int\Psi})}\int(e^{-\int\Psi}e^{-2\int(e^{-\int\Psi})}) =$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-\int(e^{-\int\Psi})}$$

con solución general:

$$y = C_0 e^{\int (e^{-\int \Psi})} + C_1 e^{-\int (e^{-\int \Psi})} + \int (H e^{\int \Psi}\ e^{\int (e^{-\int \Psi})})$$

ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES.

El intento de realizar un trabajo con el título: "METODO PARA LA RESOLUCION DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES" es un ejercicio vano.

Sin embargo, con éste mi método, pueden resolverse infinidad de ellas. Simplemente, haciendo en (4.0) y (6.0), por ejemplo, R=Q obtenemos la ecuación diferencial y su solución siguientes:

$$Q\,Q'' + Q\,Q' - \frac{g''}{g'}Q' - Q^2\,(\frac{g'}{\sqrt{2}})^2 = \frac{1}{2}(\Phi' - \frac{g''}{g'}\Phi + g'f\ )$$

con solución:

$$Q = \sqrt{\frac{1}{2}\left[e^{g} \int ((\Phi + f)e^{-g}) + e^{-g} \int ((\Phi - f)e^{g}) \right]}$$

El número de posibilidades en incontable.Dependerá de la habilidad del lector en escoger adecuadamente las ecuaciones con sus soluciones, al mismo tiempo que los adecuados valores de las cinco funciones de estas ecuaciones (4.0) y (6.0) o de cualesquiera otras
(y son muchas) que el pretendiente pueda ingeniar para sus propósitos.

HA REALIZADO ESTE TRABAJO:

NICETO VALCARCEL YESTE. LICENCIADO EN CC.FISICAS POR LA U.N.E.D.

La transcripción de este trabajo al ordenador tendrá seguramente más de un error de escritura, pero para un lector inmerso en él, no supondrá ninguna dificultad, si bien agradecería cualquier sugerencia al respecto o a cualquier otro respecto.