PROPIEDADES DE LA DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL DE LA SUMA DE DOS CUADRADOS.

Niceto Valcárcel Yeste. Licenciado en C.C. Físicas por la U.N.E.D.

May 12, 2011

1 Introducción.

Este trabajo está basado en la conocida propiedad sobre los números naturales siguiente:

En la descomposición factorial de la suma de los cuadrados de dos números naturales (en adelante, suma de dos cuadrados), los factores primos de la forma $4n-1$ que aparezcan, en su caso, lo harán elevados a potencia par.

2 Proposición.

Si la suma de dos cuadrados es el cuadrado de un número primo, éste será siempre un número primo de la forma $4n+1$.

2.1 Demostración.

Demostración por reducción al absurdo:

Sea un número primo $c = 4c_1 - 1$ cuyo cuadrado es suma de cuadrados:

$a^2 + b^2 = c^2$

Será siempre, para un a_1 tal que: $0 < a_1 < c$:

$a = c - a_1$

Sustituyendo:

$(c - a_1)^2 + b^2 = c^2$

$2a_1 c = b^2 + a_1^2$

$2c = a_1 + \frac{b^2}{a_1}$

Debíendose cumplir:

$b = a_1 b_1$

y, consecuéntemente:

$2c = a_1 + a_1 b_1^2 = a_1 \left(b_1^2 + 1\right) = 2\left(4c_1 - 1\right)$

Esta igualdad no puede cumplirse pues sólo hay números primos de la forma $4n+1$ en la descomposición factorial de b_1^2+1 , como ya demostré en mi trabajo: "Descomposición factorial de los números de la forma n^2+1".

En consecuencia, una suma de cuadrados no será el cuadrado de un número primo de la forma $4n-1$.

3 Proposición.

Si la suma de los cuadrados de dos números naturales, a y b , contiene números primos de la forma $4n-1$ en su descomposición factorial, será necesariamente porque formen parte también de la descomposición factorial de ambos números.

3.1 Demostración.

Demostración por reducción al absurdo.

Supongamos que fuera cierto que existen a y b para los que se cumple:

$a^2+b^2=kc^2$

donde c es uno cualquiera de los primos de la forma $4n-1$ que forman parte de su descomposición factorial, y k es el resto de factores

Siempre será:

$a=a_1c+a_2$

$b=b_1c+b_2$

donde a_1 y $b_1$son números naturales cualesquiera ; a_2 y b_2 también son números naturales cualesquiera, salvo que son menores que c y, por tanto, menores o iguales, en su caso, a a y b , respectivamente.

Sustituyendo en la ecuación:

$a^2+b^2=kc^2=\left(a_1^2+b_1^2\right)c^2+2c\left(a_1a_2+b_1b_2\right)+a_2^2+b_2^2$

Del resultado anterior se deduce:

$a_2^2+b_2^2=k'c$

Tal cosa no es posible, como se demostró anteriormente, salvo que,en principio, sea $k'=k''c$, resultando:

$a_2^2+b_2^2=k''c^2$

Ahora bien, los números a_2 y b_2 son ambos menores que c, y aún en el peor de los casos que fueran ambos iguales a $(c-1)$ ha de ser $k''\leq 1$, pues:

$a_2^2+b_2^2\leq 2\left(c-1\right)^2=2\left(c^2-2c+1\right)<2c^2$.

Sólo sería posible la solución $k''=1$, que como quedó demostrado anteriormente, no es posible.

Por tanto, si un número primo de la forma $4n-1$ forma parte de la descomposición factorial (elevado a potencia par) de una suma de dos cuadrados, será porque forma parte de la descomposición factorial de ambos números.

4 Predeterminación de la descomposición factorial.

Una suma de cuadrados puede ponerse de forma general.

$a^2 + b^2 = n^2 + (n + 2c + 1)^2$

Si los números n y $(2c + 1)$ no tienen números primos de la forma $4x - 1$ en común, en su descomposición factorial, esa suma de cuadrados contendrá sólamente números primos de la forma $4x + 1$ en su descomposición factorial, y consecuentemente, amparado en el teorema de Fermat, la suma de cuadrados podrá expresarse como suma de cuadrados almenos de otra forma distinta, es decir, existirán almenos una pareja de valores: $n_1 \neq n$, $c_1 \neq c$ para los que se cumpla:

$a^2 + b^2 = n^2 + (n + 2c + 1)^2 = n_1^2 + \left(n_1^2 + 2c_1 + 1\right)^2$

Si tienen números primos en común, ya sean de la forma $4x - 1$ ó $4x + 1$, la descomposición factorial los contendrá elevados al cuadrado. El resto, en su caso, estará compuesto exclusivamente por primos de la forma $4x + 1$.

Ha realizado este trabajo, Niceto Valcárcel Yeste, licenciado en cc.físicas por la UNED.

Agradezco al lector el tiempo empleado y sus comentarios que podrá enviarme a la dirección de correo electrónico:

nicetovalcarcel@gmail.com